

Lección 8: Navegando a lo largo de una secuencia de líneas rectas

Jesús Savage

Trabajo realizado con el apoyo del programa: UNAM-DGAPA-PAPIME
PE108624

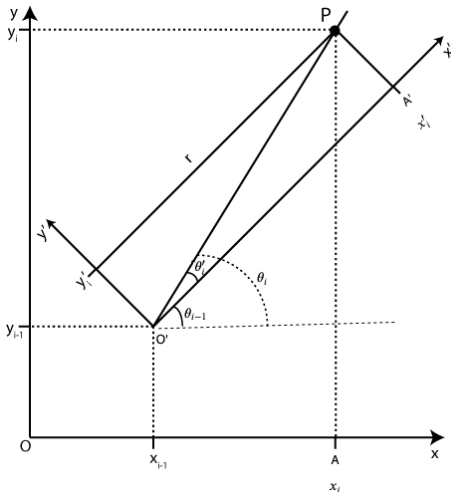
31 de octubre de 2024

Índice

- ① Introducción
- ② Robot Omnidireccional
- ③ Robot Bidireccional
- ④ Suavizado de Caminos

Introducción

Dados (x_{i-1}, y_{i-1}) para llegar al punto (x_i, y_i) se desea saber el ángulo que el robot debe girar y lo que tiene que avanzar para llegar a su destino.



Introducción

$$x_i = \overline{OA} = x_{i-1} + r \cos(\theta_{i-1} + \theta'_i)$$

$$y_i = \overline{AP} = y_{i-1} + r \sen(\theta_{i-1} + \theta'_i)$$

$$x_i = x_{i-1} + r \cos(\theta'_i) \cos(\theta_{i-1}) - r \sen(\theta'_i) \sen(\theta_{i-1})$$

$$y_i = y_{i-1} + r \cos(\theta'_i) \sen(\theta_{i-1}) + r \sen(\theta'_i) \cos(\theta_{i-1})$$

$$x'_i = \overline{O'A'} = r \cos(\theta'_i)$$

$$y'_i = \overline{O'P'} = r \sen(\theta'_i)$$

$$x_i = x_{i-1} + x'_i \cos(\theta_{i-1}) - y'_i \sen(\theta_{i-1})$$

$$y_i = y_{i-1} + x'_i \sen(\theta_{i-1}) + y'_i \cos(\theta_{i-1})$$

Esto para un sistema omnidireccional.

Robot Omnidireccional

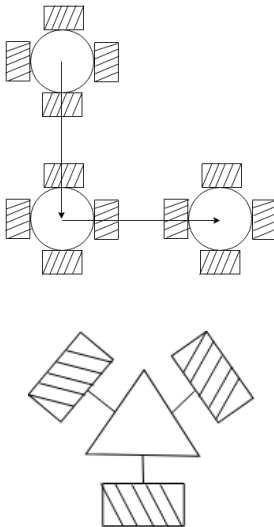
En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i-1}) & -\sin(\theta_{i-1}) & 0 \\ \sin(\theta_{i-1}) & \cos(\theta_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

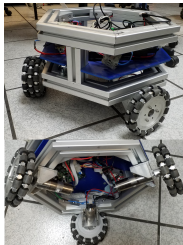
Despejando x'_i, y'_i y θ'_i para un robot omnidireccional:

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i-1}) & \sin(\theta_{i-1}) & 0 \\ -\sin(\theta_{i-1}) & \cos(\theta_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ \theta_i - \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

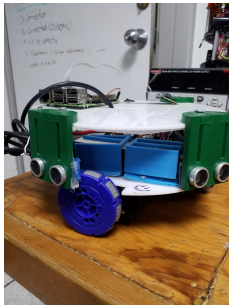
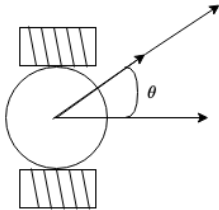
Robots Omnidireccionales



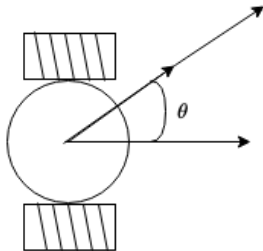
Robots Omnidireccionales



Robot Bidireccional



Robot Bidireccional

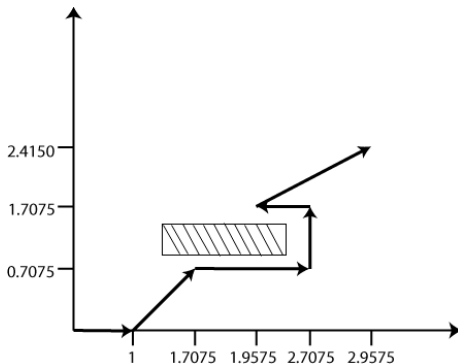


En el caso de un sistema robot bidireccional, las ecuaciones son las mismas, pero el robot primero gira un ángulo θ_i y después avanza, entonces se usa este ángulo en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ \theta_i - \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Se desea que el robot recorra el siguiente camino:



Caso 1. Robot bidireccional

El robot primero gira y luego avanza. El ángulo θ_i se calcula de la siguiente forma:

$$\theta_i = \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)$$

Tiempo $i = 1$

Pose inicial del robot:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0$$

Siguiente pose:

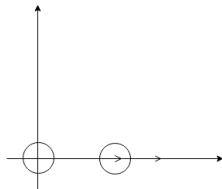
$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

$$\theta'_1 = 0$$

$$x'_1 = 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot \sin(0) = 1$$

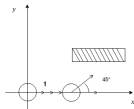
$$y'_1 = -1 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$$

Ángulos positivos son giros a la izquierda, ángulos negativos son a la derecha.



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 2$



Pose del robot

$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

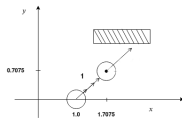
Siguiente pose:

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

$$\theta'_2 = 45^\circ$$

$$x'_2 = 0.7075 \cdot \cos(45^\circ) + 0.7075 \cdot \sin(45^\circ) = 1$$

$$y'_2 = -0.7075 \cdot \sin(45^\circ) + 0.7075 \cdot \cos(45^\circ) = 0$$



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 3$

Pose del robot

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

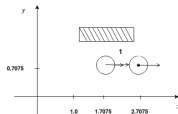
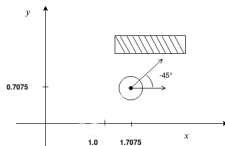
Siguiente pose:

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0$$

$$\theta'_3 = -45^\circ$$

$$x'_3 = 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot \sin(0) = 1$$

$$y'_3 = -1 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$$



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 4$

Pose del robot

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0$$

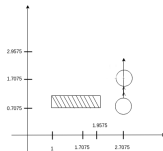
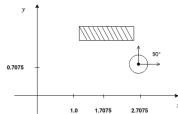
Siguiente pose:

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

$$\theta'_4 = 90^\circ$$

$$x'_4 = 0 \cdot \cos(90^\circ) + 1 \cdot \sin(90^\circ) = 1$$

$$y'_4 = -0 \cdot \sin(90^\circ) + 1 \cdot \cos(90^\circ) = 0$$



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 5$

Pose del robot

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

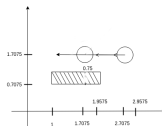
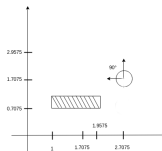
Siguiente pose:

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$

$$\theta'_5 = 90^\circ$$

$$x'_5 = -0.7075 \cdot \cos(180^\circ) + 0 \cdot \sin(180^\circ) = 0.7075$$

$$y'_5 = -0.7075 \cdot \sin(180^\circ) + 0 \cdot \cos(180^\circ) = 0$$

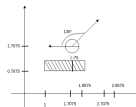


Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 6$

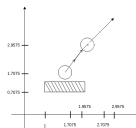
Pose del robot

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$



Siguiente pose:

$$x_6 = 2.9575, y_6 = 2.4150, \theta_6 = 45^\circ$$



$$\theta'_6 = -135^\circ$$

$$x'_6 = 1 \cdot \cos(45^\circ) +$$

$$0.7075 \cdot \sin(45^\circ) = 0.7075$$

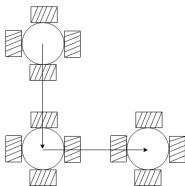
$$y'_6 = -1.7075 \cdot \sin(45^\circ) + 0.7075 \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

Caso 2. Robot Omnidireccional

Recordar que para un robot omnidireccional se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ \theta_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i-1}) & \sin(\theta_{i-1}) & 0 \\ -\sin(\theta_{i-1}) & \cos(\theta_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ \theta_i - \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

En este tipo de robots para avanzar por el eje x_i' se utiliza un par de ruedas, por ejemplo las que están paralelas al eje X , para avanzar por el otro eje y_i' se usa el otro par.



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 1$

Pose del robot

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0$$

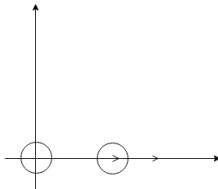
Siguiente pose:

$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

$$x'_1 = 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot \sin(0) = 1$$

$$y'_1 = -1 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$$

$$\theta'_1 = 0$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 2$

Pose del robot

$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

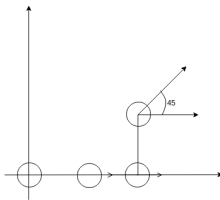
Siguiente pose:

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

$$x_2' = 0.7075 \cdot \cos(0) + 0.7075 \cdot \sin(0) = 0.7075$$

$$y_2' = -0.7075 \cdot \sin(0) + 0.7075 \cdot \cos(0) = 0.7075$$

$$\theta_2' = -45^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 3$

Pose del robot

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

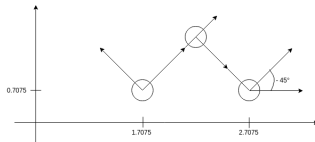
Siguiente pose:

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0^\circ$$

$$x'_3 = 1 \cdot \cos(45^\circ) + 0 \cdot \sin(45^\circ) = 0.7075$$

$$y'_3 = -1 \cdot \sin(45^\circ) + 0 \cdot \cos(45^\circ) = -0.7075$$

$$\theta'_3 = -45^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 4$

Pose del robot

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0$$

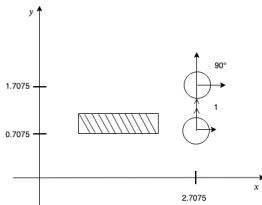
Siguiente pose:

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

$$x'_4 = 0 \cdot \cos(0^\circ) + 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

$$y'_4 = -0 \cdot \sin(0^\circ) + 1 \cdot \cos(0^\circ) = 1$$

$$\theta'_4 = -90^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 5$

Pose del robot

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

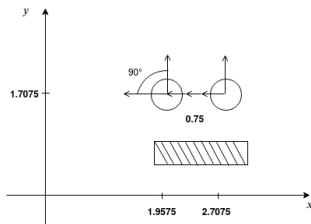
Siguiente pose:

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$

$$x'_5 = -0.75 \cdot \cos(90^\circ) + 0 \cdot \sin(90^\circ) = 0$$

$$y'_5 = 0.75 \cdot \sin(90^\circ) + -0.75 \cdot \cos(0^\circ) = 0.75$$

$$\theta'_5 = -90^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 6$

Pose del robot

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$

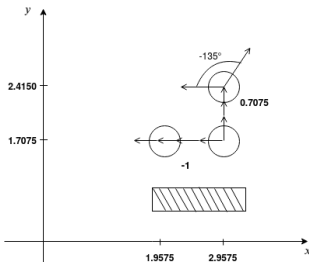
Siguiente pose:

$$x_6 = 2.9575, y_6 = 2.4150, \theta_6 = 45^\circ$$

$$x'_6 = 1 \cdot \cos(180^\circ) - 0.7075 \sin(180^\circ) = -1$$

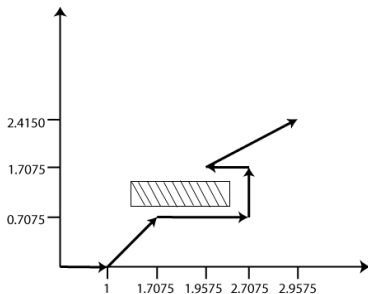
$$y'_6 = 1 \cdot \sin(180^\circ) + -0.7075 \cos(180^\circ) = 0.7075$$

$$\theta'_6 = -135^\circ$$



Suavizado de Caminos

En ocasiones es necesario suavizar el camino que recorre el robot:



Para lograr estos se necesitan encontrar una serie de puntos $\bar{s}_i = (sx_i, sy_i)$ que suavicen la trayectoria que debe seguir el robot de acuerdo a cierto criterio de optimización.

Suavizado de Caminos

Dados los puntos del camino que el robot debe seguir $\bar{p}_i = (x_i, y_i)$, un criterio de optimización para encontrar los puntos $\bar{s}_i = (sx_i, sy_i)$ puede ser la siguiente:

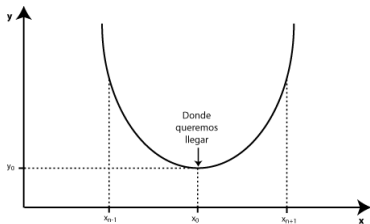
$$Z = \sum_{i=1}^N (K_1 |\bar{p}_i - \bar{s}_i|^2 + K_2 (|\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_i|^2 + |\bar{s}_i - \bar{s}_{i-1}|^2)) = \sum_{i=1}^N z_i$$

Donde z_i es:

$$z_i = K_1 ((x_i - sx_i)^2 + (y_i - sy_i)^2) + K_2 ((sx_{i+1} - sx_i)^2 + (sy_{i+1} - sy_i)^2) + K_2 ((sx_i - sx_{i-1})^2 + (sy_i - sy_{i-1})^2)$$

Usando el concepto de optimización de descendiendo por la pendiente más pronunciada (steepest descent) se pueden encontrar las $\bar{s}_i$ que minimicen Z .

Suavizado de Caminos



Para la función presentada en la figura anterior: $y = y_0 + (x - x_0)^2$, el mínimo puede ser encontrado empezando con un punto x_{n-1} cualquiera, el objetivo es llegar al punto mínimo de la ecuación y_{opt} con coordenada x_{opt} utilizando una función recurrente:

$$x_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1} - \delta \frac{dy}{dx}$$

Suavizado de Caminos

Por lo tanto para encontrar los puntos $\bar{s}_i$ se utiliza la siguiente función recurrente:

$$s_i^n = s_i^{n-1} - \delta \cdot \frac{dz}{ds_i}$$

$$Z_i = K_1((x_i - sx_i)^2 + (y_i - sy_i)^2) + K_2((sx_{i+1} - sx_i)^2 + (sy_{i+1} - sy_i))^2 + K_2((sx_{i-1} - sx_i)^2 + (sy_{i-1} - sy_i))^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial sx_i} = -2K_1(x_i - sx_i) - 2K_2(sx_{i+1} - sx_i) - 2K_2(sx_{i-1} - sx_i)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial sy_i} = -2K_1(y_i - sy_i) - 2K_2(sy_{i+1} - sy_i) - 2K_2(sy_{i-1} - sy_i)$$

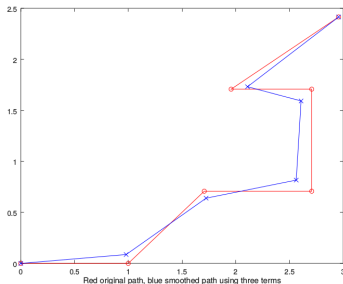
Suavizado de Caminos

Haciendo $\mu = \delta \cdot 2 \cdot K_1$ y $\eta = 2 \cdot \delta \cdot K_2$.

Por lo tanto la función para encontrar las $\bar{s}$ óptima es:

$$\bar{s}_i^n = \bar{s}_i^{n-1} + \mu \cdot (\bar{p}_i - \bar{s}_i^{n-1}) + \eta \cdot (\bar{s}_{i-1}^{n-1} - 2 \cdot \bar{s}_i^{n-1} + \bar{s}_{i+1}^{n-1})$$

En la siguiente figura se muestra en rojo el camino y en azul el camino suavizado utilizando como criterio de optimización el punto anterior y posterior.



Suavizado de Caminos

