

Control de posición de un robot de par diferencial

R.P. Marco Negrete

Día 02, mes 11, año 26 d.M.

1. Objetivo

Diseñar un control para un robot de par diferencial de modo que alcance una posición deseada dada una condición inicial arbitraria.

2. Consideraciones

- El estado del robot está determinado por tres valores: $[x \ y \ \theta]^T$
- Se desea alcanzar la posición final $[x_g \ y_g]^T$
- No hay deslizamiento lateral en las llantas
- No hay fricción seca

3. Cálculo de posición

Dado un robot de par diferencial de diámetro D , si se conoce la condición inicial del robot $[x_0 \ y_0 \ \theta_0]^T$, se puede calcular la posición en forma incremental a partir de las distancias avanzadas por cada llanta.

Se tienen tres casos principales:

1. El robot sólo avanza (ambas llantas recorren la misma distancia)
2. El robot sólo gira (las llantas recorren distancias de igual magnitud pero en sentido contrario)
3. El robot gira y avanza al mismo tiempo (ambas llantas se mueven distancias diferentes con sentidos que pueden ser diferentes)

Las ecuaciones que se presentan consideran el tercer caso, que es el más general.

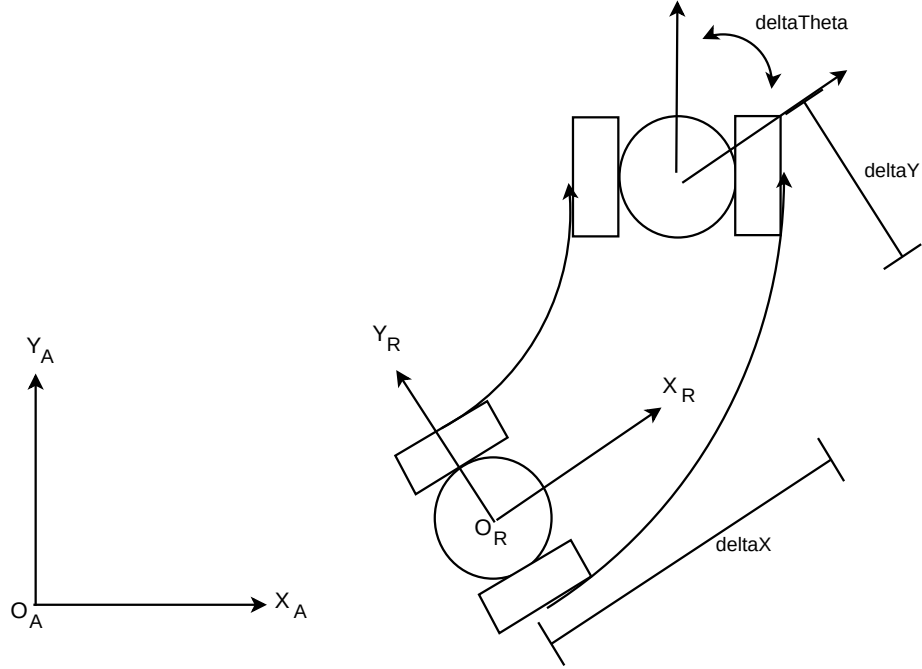


Figura 1: Sistemas coordenados para el cálculo de posición

Sistemas coordenados

Considérense los sistemas coordenados mostrados en la figura 1. El sistema O_A es el sistema de referencia absoluto mientras que el sistema O_R se mueve junto con el robot, esto es, en el sistema O_R el eje positivo X_R siempre apunta hacia el frente del robot y el eje y_R siempre apunta al costado izquierdo. Los incrementos en los tres estados $[\Delta X_R \ \Delta Y_R \ \Delta \theta]^T$ se calculan en cada instante de tiempo $K\Delta t$ con respecto al sistema O_R , por lo que es necesario transformarlos al sistema absoluto O_A . Nótese que el sistema O_R es el sistema O_A girado un ángulo θ sobre el eje Z_A y trasladado a la posición del robot con respecto a O_A .

Variables

- S_i : Distancia avanzada por la llanta izquierda
- S_d : Distancia avanzada por la llanta derecha
- D : Diámetro del robot
- r_g : Radio de giro (si el robot sólo avanza, el radio de giro es infinito, si sólo gira sobre su centro, el radio de giro es cero)

Cálculo de los incrementos

Dadas las distancias avanzadas por cada llanta y el diámetro del robot, los incrementos $[\Delta X_R \ \Delta Y_R \ \Delta\theta]^T$ se pueden calcular de acuerdo con:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{S_d - S_i}{D} \\ r_g &= \frac{S_i + S_d}{2\Delta\theta} && \text{si } S_i \neq S_d \\ \Delta X_R &= r_g \sin(\Delta\theta) \\ \Delta Y_R &= r_g (1 - \cos(\Delta\theta)) \\ \Delta\theta &= 0 \\ \Delta X_R &= S_i && \text{si } S_i = S_d \\ \Delta Y_R &= 0\end{aligned}$$

Ahora los incrementos se transforman al sistema O_A y se suman al estado actual del robot:

$$\begin{aligned}X_A &= X_A + \Delta X \cos(\theta) - \Delta Y \sin(\theta) \\ Y_A &= Y_A + \Delta X \sin(\theta) + \Delta Y \cos(\theta) \\ \theta &= \theta + \Delta\theta\end{aligned}$$

4. Control de posición

Ahora se desea que el robot alcance la posición deseada $[X_g \ Y_g]^T$. El objetivo es calcular las velocidades de las llantas izquierda y derecha (en función del error) necesarias para que el robot llegue a la posición deseada. Para ello, primero se calculan el error de posición y el error de ángulo:

$$\begin{aligned}e_p &= P_g - P_R = \begin{bmatrix} X_g - X_R \\ Y_g - Y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} \\ e_a &= \text{Atan2}(e_y, e_x) - \theta_R\end{aligned}$$

La siguiente ley de control asegura que el robot llegue a la posición deseada bajo las consideraciones expuestas en la sección 2:

$$\begin{aligned}v_i &= -K_a e_a + K_d \rho \left(1 - \frac{|\text{sat}(e_a)|}{K_{sat}}\right) \\ v_d &= +K_a e_a + K_d \rho \left(1 - \frac{|\text{sat}(e_a)|}{K_{sat}}\right)\end{aligned}$$

con constantes $K_a > 0$, $K_d > 0$, la norma del error de posición $\rho = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$, y una constante de saturación $K_{sat} \in (0, \frac{\pi}{4}]$. La función $\text{sat}(e_a)$ se define como

$$\text{sat}(e_a) = \begin{cases} K_{sat} & \text{si } e_a \geq K_{sat} \\ e_a & \text{si } -K_{sat} < e_a < K_{sat} \\ -K_{sat} & \text{si } e_a \leq -K_{sat} \end{cases}$$