Repaso 3:
Procesos Estócasticos

Dr. Jesús Savage
Dr. Carlos Rivera

3 de marzo de 2021

Índice

Media y varianza de una variable aleatoria

La media de una variable aleatoria x es:

$$\mu_X = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

En donde $f(x)$ es su función de densidad.

La varianza se define como:

$$\sigma_X^2 = E\{(x - \mu_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f(x) dx$$

La desviación estandar se define como: $\sigma_X = \sqrt{(}E\{(x - \mu_X)^2\})$

Covarianza

La covarianza de dos variables aleatorias x y y se define como:

$$\sigma_{XY} = cov(x, y) = E\{((x - E\{x\})(y - E\{y\}))\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y) \cdot f(x, y)dxdy$$

Donde $f(x, y)$ es la función de probabilidad de densidad conjunta y $\mu_X = E\{x\}$ y $\mu_Y = E\{y\}$.

$$\sigma_{XY} = cov(X, Y) = E\{((x - E\{x\})(y - E\{y\}))\}$$
$$= E\{xy - E\{x\}y - xE\{y\} + E\{x\}E\{y\}\}$$
$$= E\{xy\} - E\{x\}E\{y\} - E\{x\}E\{y\} + E\{x\}E\{y\}$$
$$= E\{xy\} - E\{x\}E\{y\}$$

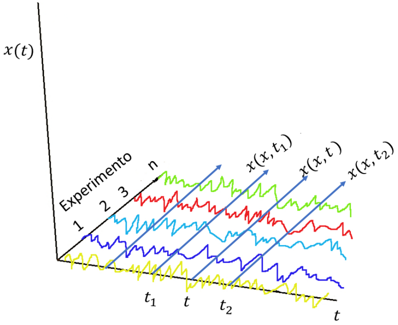
Correlación

La correlación de dos variables aleatorias x y y se define como:

$$corr(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E\{((x - E\{x\})(y - E\{y\}))\}}{\sigma_x \sigma_y}$$

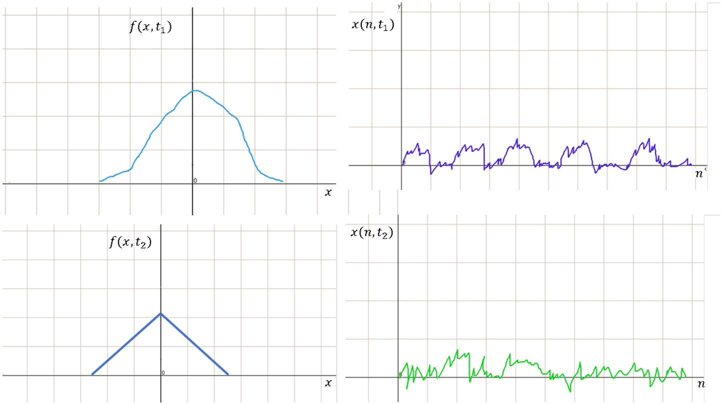
Captura de variables aleatorias

Ejemplo: Se mide la temperatura a lo largo del día durante varios dias en una ciudad. Para un tiempo determinado t se encuentra una función $x(n, t)$ que indica el comportamiento de la temperatura en el día n a esa hora.



Captura de variables aleatorias

En las siguientes figuras se muestra el comportamiento de la temperatura para dos tiempos diferentes en el día: t_1 y t_2, junto con sus funciones de densidad de probabilidad. Se observa que para estos dos tiempos se cuenta con dos funciones de densidad diferentes.



Repaso Procesos Estocásticos

Sea: $x_1 = x(n, t_1)$ los valores que tiene la temperatura en el tiempo t_1 en cada uno de los días n.

El valor esperado de x_1:

$$E\{x_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, t_1) dx_1 = m(t_1)$$

Para $x_2 = x(n, t_2)$

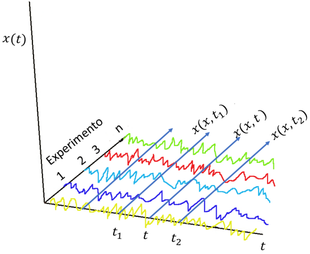
$$E\{x_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2, t_2) dx_2 = m(t_2)$$

Repaso Procesos Estocásticos

En general: $x = x(n, t)$

El valor esperado de x:

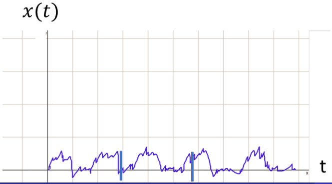
$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx = m(t)$$



Sea $x(t)$ todos los valores de la temperatura para un día especifico n.

Su promedio en el tiempo:

$E\{x(t)\} = \text{lím}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt = \overline{x}$



Repaso Procesos Estocásticos

Promedio en el tiempo $E\{x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt = \overline{x}$

Esperanza del promedio en el tiempo

$E\{\overline{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x} \cdot f(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \cdot f(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$

$= 1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$

Lo que indica que la esperanza del promedio es el promedio mismo.

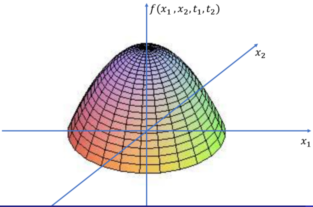
Función de Autocorrelación

Con $x_1 = x(n, t_1)$ los valores que tiene la temperatura en el tiempo t_1 en cada uno de los días n y $x_1 = x(n, t_2)$ los valores que tiene la temperatura en el tiempo t_2

Entonces la función de correlación de x_1 y x_2:

$$E\{x_1 x_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdot f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$= R_{XX}(t_1, t_2)$$



Si $t_1 = t$ y $t_2 = t + \zeta$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2 + \zeta) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_t x_{t-\zeta} f(x_t, x_{t+\zeta}, t, t + \zeta) dx_1 dx_2$$

Si el proceso es estacionario, es decir que la función de densidad de probabilidad no cambia en el tiempo:

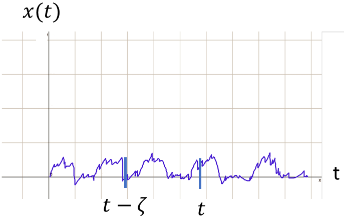
$$= R_{XX}(t, t - \zeta) = R_{XX}(\zeta)$$

Función de correlación en el tiempo

Sea $x(t)$ todos los valores de la temperatura para un día especifico n.

La función de correlación en el tiempo:

$$R_{xx}(\zeta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\zeta)dt$$



Teorema de Ergodicidad

Si se cumple que $\overline{x} = E\{x(x,t)\}$ y $R_{xx}(\zeta) = R_{XX}(\zeta)$, es decir si,los promedios en el tiempo son iguales a sus correspondientes estadisticos se dice que el sistema es ergódico.

Variables discretas

Sean x_i variables aleatorias con probabilidades p_i, entonces su media es:

$E\{x\} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot p_i = \mu_x$

Varianza

$E\{(x-\mu_x)^2\} = \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu_x)^2 \cdot p_i = \sigma_x$

Correlaciones

$R_{xx}(\zeta) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+\zeta} \cdot p_{i,i+\zeta}$

Si todas las variables tienen la misma probabilidad:

$E\{x\} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$

$E\{(x-\mu_x)^2\} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu_x)^2$

$R_{xx}(\zeta) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+\zeta}$

1.-Definiendo la función de correlación como:

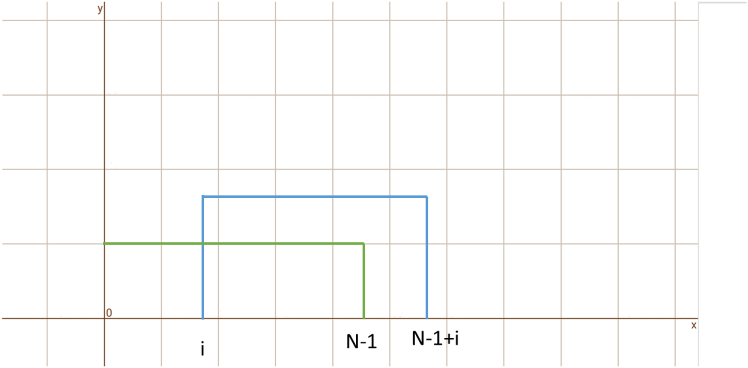
$$r(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k x_{k+\zeta}$$

Demostrar que $r(\zeta) = r(-\zeta)$ Haciendo:

$$h = k + \zeta \quad \Rightarrow \quad k = h - \zeta; \quad Para \quad \begin{array}{ll} k = -\infty & \Rightarrow h = -\infty \\ k = \infty & \Rightarrow h = \infty \end{array}$$

$$r(\zeta) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x_{h-\zeta} x_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k x_{k-\zeta} = r(-\zeta)$$

Si se tiene un número limitado de muestras, es decir usando un bloque de la señal:



$$r(\zeta) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k x_{k+\zeta}$$

Haciendo:

$$\begin{array}{ccc} h = k + \zeta & \Rightarrow & k = h - \zeta \\ k = 0 & \Rightarrow & h = \zeta \\ k = N - 1 & \Rightarrow & h = N - 1 + \zeta \end{array}$$

$$r(\zeta) = \frac{1}{N} \sum_{h=\zeta}^{N-1+\zeta} x_{h-\zeta} x_h$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=\zeta}^{N-1+\zeta} x_k x_{k-\zeta}$$

Si $N >> 0$ y $\zeta << N$

Por lo tanto:

$$r(\zeta) \approx r(-\zeta)$$