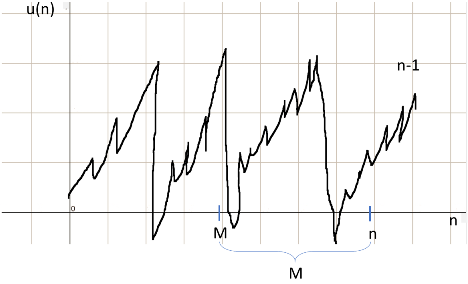
# Lección 2:
# Análisis de Predicción Lineal

Dr. Jesús Savage
Dr. Carlos Rivera

6 de septiembre de 2021

# Índice

# Análisis de Predicción Lineal




Sea la serie de tiempo $u(n), u(n-1), \ldots, u(n-M)$.

Sea $U(n|\underline{u}_{n-1})$ el valor de predicción $u(n)$ dado este conjunto de muestras $\underline{u}_{n-1}^T = [u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-M}]$.

El valor de predicción se obtiene a través de una función con este vector:

$$U(n|\underline{u}_{n-1}) = f(u(n-1), \ldots, u(n-M))$$

# Análisis de Predicción Lineal

Predicción lineal cuando la función es simplemente una combinación lineal de las muestras $u(n-1), u(n-2), \ldots, u(n-M)$

$$U(n|\underline{u}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{M} w_k^* u(n-k)$$

Las $w_k$ son constantes complejas y $*$ es el conjugado de estos valores.

Los valores de $u(n-1), u(n-2), \ldots, u(n-M)$ se utilizan para hacer la predicción de la muestra $u(n)$. Este tipo de predicción se denomina predicción hacia delante. También se podría utilizar $u(n), u(n-1), \ldots, u(n-M+1)$ para hacer la predicción de la muestra $u(n-M)$. Este tipo de proyección se llama predicción hacia atrás

# Análisis de Predicción Lineal

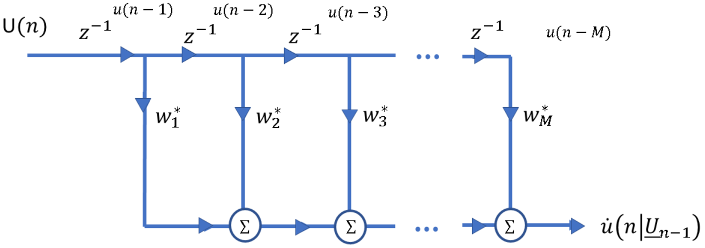


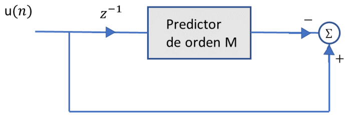

Figura: Representación gráfica del predictor de la muestra $u(n)$ con la función $U(n|\underline{u}_{n-1})$.

# Filtro de Predicción y Error

Error de predicción.

$f_M(n) = u(n) - U(n|\underline{u}_{n-1})$

Donde la $M$ es el número de coeficientes del filtro de predicción.




En la teoría Wiener, el criterio del error cuadrático medio mínimo es utilizado para optimizar el filtro, es decir encontrar los pesos óptimos $\underline{w}^T = [w_1, w_2, ..., w_M]$

$$J(\underline{w}) = E[\underbrace{f_m(n)f_m^*(n)}]$$

Recordar:

$$x = A + Bj$$

$$|x| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$x^* = A - Bj$$

$$x \cdot x^* = (A + Bj)(A - Bj) = A^2 + B^2 = |x|^2$$

Magnitud de un número complejo al cuadrado

# Filtro de Predicción y Error

Por lo tanto $J(\underline{w})$, el error cuadrático medio, es un escalar real y positivo. Minimizando $J(\underline{w})$ obtenemos un filtro ideal óptimo en el sentido de error cuadrático medio mínimo.

Usando notación matricial.

$$\underline{w}^T = [w_1, w_2, \ldots, w_M]$$

El vector de entradas se define como:

$\underline{u}^T(n-1) = [u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-M}]$.

# Filtro de Predicción y Error

Entonces el estimado :

$$U(n|\underline{u_{n-1}}) = \underline{w}^H \cdot \underline{u}(n-1) = [w_1^*, w_2^*, \ldots, w_M^*] \cdot \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(n-M) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} w_k^* \cdot u(n-k)$$

Donde H significa transposición Hermitiana (que es el transpuesta de un vector y haciendo su conjugado)

# Filtro de Predicción y Error

Tomando el conjugado en ambos lados de la expresión:

$$U^*(n|\underline{u_{n-1}}) = (\underline{w}^H \cdot \underline{u}(n-1))^*$$

Se puede demostrar que:

$\underbrace{U^*(n|\underline{u}_{n-1})}_{\text{escalar}} = \underline{u}^H(n-1) \cdot \underline{w}$

Entonces el error de estimación:

$f_M(n) = u(n) - \underline{w}^H \cdot \underline{u}(n-1)$

Su conjugado es:

$$f_M^*(n) = u^*(n) - \underline{u}^H(n-1) \cdot \underline{w}$$

# Filtro de Predicción y Error

Por lo tanto error cuadrático medio

$$J(\underline{w}) = E\{f_M(n)f_M^*(n)\} =$$

$$E\{(u(n) - \underline{w}^H\underline{u}(n-1))(u^*(n) - \underline{u}^H(n-1)\underline{w})\}$$

$$= E\{u(n)u^*(n) - \underline{w}^H\underline{u}(n-1)u^*(n)$$
$$-u(n)\underline{u}^H(n-1)\underline{w} + \underline{w}^H\underline{u}(n-1)\underline{u}^H(n-1)\underline{w}\}$$

$$= E\{u(n)u^*(n)\} - \underline{w}^H E\{\underline{u}(n-1)u^*(n\}$$
$$-E\{u(n)\underline{u}^H(n-1)\}\underline{w} + \underline{w}^H E\{\underline{u}(n-1)\underline{u}^H(n-1)\}\underline{w}$$

# Error Cuadrático Medio

1.-$E\left\{u(n)u^*(n)\right\}$ es igual a la variancia de la entrada $u(n)$, asumiendo que $u(n)$ tiene media igual a cero:

$$\sigma_u^2 = E\{u(n)u^*(n)\}$$

2.-$E\left\{\underline{u}(n-1)u^*(n)\right\}$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(n-M) \end{bmatrix} \quad u^*(n)\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} u(n-1)u^*(n) \\ u(n-2)u^*(n) \\ \vdots \\ u(n-M)u^*(n) \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left\{u(n-1)u^*(n)\right\} \\ E\left\{u(n-2)u^*(n)\right\} \\ \vdots \\ E\left\{u(n-M)u^*(n)\right\} \end{bmatrix}$$

Definiendo:

$$E\{u(n-k)u^*(n-j)\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u(n-k)u^*(n-j) = r(j-k)$$

Por lo tanto $E\{\underline{u}(n-1)u^*\} =$

$$\begin{bmatrix} r(-1) \\ r(-2) \\ r(-3) \\ \vdots \\ r(-M) \end{bmatrix} = \underline{r}$$

3.-$E\{u(n)\underline{u}^H(n-1)\} = E\{[u(n)(u^*(n-1)\ u^*(n-2)\cdots u^*(n-M)]\}$

$= [E\{u(n)u^*(n-1)\}\ E\{u(n)u^*(n-2)\}\cdots E\{u(n)(u^*(n-M)\}]$

$= [r^*(1)\ r^*(2)\ldots r^*(m)] = \underline{r}^H$

Esto es debido a que $r^*(i-k) = r[k-i]$

4.-$E[\underline{u}[n-1]\underline{u}^*(n-1)] =$

$$E\left[\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(n-M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^*(n-1) & u^*(n-2) & \ldots & u^*(n-M) \end{bmatrix}\right] =$$

$$E\begin{bmatrix} u(n-1)u^*(n-1) & u(n-1)u^*(n-2) & \ldots & u(n-1)u^*(n-M) \\ u(n-2)u^*(n-1) & u(n-2)u^*(n-2) & \ldots & u(n-2)u^*(n-M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(n-M)u^*(n-1) & u(n-M)u^*(n-2) & \ldots & u(n-M)u^*(n-M) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E\{u(n-1)u^*(n-1)\} & E\{u(n-1)u^*(n-2)\} & \dots & E\{u(n-1)u^*(n-M)\} \\ E\{u(n-2)u^*(n-1)\} & E\{u(n-2)u^*(n-2)\} & \dots & E\{u(n-2)u^*(n-M)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{u(n-M)u^*(n-1)\} & E\{u(n-M)u^*(n-2)\} & \dots & E\{u(n-M)u^*(n-M)\} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

Para procesos estacionarios la matriz de correlacion R es definida únicamente especificando la sucesión de autocorrelación de los valores de entrada: $r[0], r[1], \dots, r[M-1]$

Entonces el error cuadrático medio

$$J(\underline{w}) = E[\underbrace{f_m(n)f_m^*(n)}] = \sigma_u^2 - \underline{w}^H\underline{r} - \underline{r}^H\underline{w} + \underline{w}^H R\underline{w}$$

El objetivo es encontrar los pesos $\underline{w}$ que minimizen este error.

Cada uno de los pesos es un número complejo: $w_k = w_{kR} + jw_{kim}$

$$\frac{dJ(\underline{w})}{d\underline{w}} =? = 0$$

Para el primer termino $\sigma_u^2$ la derivada con respecto a w̲ es cero.

Para el segundo termino:

$$g = \underline{w}^H \cdot \underline{r} = \sum_{k=1}^{M} w_k^* \cdot r_k = \sum_{k=1}^{M} (w_{kR} - jw_{kim}) r_k$$

$$\frac{\partial g}{\partial w_{kR}} = r_k \qquad ; \qquad \frac{\partial g}{\partial w_{kim}} = -jr_k$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \underline{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial w_{1R}} + j\frac{\partial g}{\partial w_{1im}} \\ \frac{\partial g}{\partial w_{2R}} + j\frac{\partial g}{\partial w_{2im}} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial w_{MR}} + j\frac{\partial g}{\partial w_{Mim}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 + j \cdot (-jr_1) \\ r_2 + j \cdot (-jr_2) \\ \vdots \\ = r_M + j \cdot (-jr_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_2 \\ \vdots \\ 2r_m \end{bmatrix} = 2\underline{r} = \frac{d(\underline{w}^H \cdot \underline{r})}{d\underline{w}}$$

Para el tercer termino:

$$g = \underline{r}^H \underline{w} = \sum_{k=1}^{M} \underline{r}_k^* (w_{kR} + j w_{kim})$$

$$\frac{\partial g}{\partial w_{kR}} = r_k^* \qquad ; \qquad \frac{\partial g}{\partial w_{kim}} = j r_k^*$$

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \begin{bmatrix} r_1^* + j \cdot (j r_1^*) \\ r_2^* + j \cdot (j r_2^*) \\ \vdots \\ r_M^* + j \cdot (j r_M^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\underline{r}^H \underline{w})}{d\underline{w}} = \underline{0}$$

Para el cuarto termino:

$$g = \underline{w}^H R \underline{w}$$

Recordar que: $\frac{d}{dx}(uv) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Haciendo:

$$\underline{c}_1^H = \underline{w}^H R \qquad \Rightarrow g = \underline{c}_1^H \underline{w} \qquad \Rightarrow \begin{array}{c} u = \underline{w}^H R \\ v = \underline{w} \end{array}$$

Entonces

$$\frac{dg}{d\underline{w}} = \frac{d(\underline{c}_1^H \underline{w})}{d\underline{w}} = \underline{0}$$

Ahora con: $\underline{c}_2 = R\underline{w} \qquad \Rightarrow g = \underline{w}^H \underline{c}_2$

$$\begin{array}{c} u = R\underline{w} \\ v = \underline{w}^H \end{array}$$

$$\frac{dg}{d\underline{w}} = \frac{d(\underline{w}^H \underline{c}_2)}{d\underline{w}} = 2 \cdot \underline{c}_2 = 2 \cdot R\underline{w}$$

$$\frac{d\underline{r}^H}{d\underline{w}} = \underline{0} + 2R\underline{w}$$

# Vector Gradiente

Finalmente, el gradiente de $J(\underline{w})$ con respecto $\underline{w}$:

$$\bigtriangledown J(\underline{w}) = \frac{dJ(\underline{w})}{d\underline{w}} = \underline{0} - 2\underline{r} + \underline{0} + 2R\underline{w}$$

Por lo tanto para obtener el vector óptimo $\underline{w}$, es decir el mínimo de $J(\underline{w})$

$\frac{dJ(\underline{w})}{d\underline{w}} = \underline{0} = -2\underline{r} + 2R\underline{w}$

$$\underline{r} = R\underline{w} \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\textit{vector optimo}}{\boxed{\underline{w}_o = R^{-1}\underline{r}}} \quad \textit{Solucion de Wiener}$$

# Vector Gradiente

Entonces con el vector óptimo $\underline{w}_o$, el error cuadrático medio mínimo es:

$$J_{min}(\underline{w}_o) = \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w}_o - \underline{w}_o^H \underline{r} + \underline{w}_o^H R \underline{w}_o$$

ya que $R\underline{w}_o = \underline{r}$

$$\begin{aligned} &= \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w}_0 - \underline{w}_0^H \underline{r} + \underline{w}_0^H \underline{r} \\ &= \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w}_0 = r(0) - \underline{r}^H \underline{w}_0 \\ &= E\{|f_M(n)|^2\} \end{aligned}$$

Porque $R$ es una matriz Toeplitz siempre tiene inversa.

Demostración:

$$R = E\{\underline{u}(n-1)\underline{u}^H(n-1)\}$$

Multiplicando por $\underline{x}^H$ y por $\underline{x}$ los dos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\underline{x}^H R \underline{x} &= \underline{x}^H E\{\underline{u}(n-1)\underline{u}^H(n-1)\}\underline{x} \\
&= E\{\left(\underline{x}^H \underline{u}(n-1)\right)\left(\underline{u}^H(n-1)\underline{x}\right)\} \\
&= E\{\left(\underline{x}^H \underline{u}(n-1)\right)\left(\underline{x}^H \underline{u}(n-1)\right)^*\} \\
&= E\{\left(\underline{x}^H \underline{u}(n-1)\right)\left(\underline{x}^H \underline{u}(n-1)\right)^*\} \\
&= E\left\{\left|x^H \underline{u}(n-1)\right|^2\right\} > 0
\end{aligned}$$

$$= E\left\{\left|x^H \underline{u}(n-1)\right|^2\right\} > 0$$

R se dice que es definida semipositiva si su forma cuadrática asociada nunca es negativa para cualquier vector $\underline{x}$. Para una matriz semipositiva su determinante no es cero y tiene inversa.

$$\underbrace{\underline{x}^H \cdot R\underline{x} \geq 0}$$

$$R^{-1} = \frac{|adjunta \quad de \quad R|}{|R|}$$

Ser definida positiva implica que su determinante y todos sus menores principales son más grandes que cero $\begin{vmatrix} r(0) & r(1) \\ r^*(1) & r(0) \end{vmatrix} > 0$

Implica que la matriz es no singular y por lo tanto tiene inversa.

# Filtro de Wiener

Ejemplo:

Se tiene la función $x_n = n$ y se desea encontrar una función de predición de ésta utilizando su valores anteriores:

$$\widehat{x}_n = X(n|\underline{x}_{n-1}) = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-m}) = w_1 \cdot x_{n-1} + w_2 \cdot x_{n-2}$$

Utlizando la solución de Wiener para encontrar los coeficiente óptimos:

$$R \cdot \underline{w} = \underline{r} \rightarrow \qquad \underline{w} = R^{-1}\underline{r}$$

# Filtro de Wiener

Donde:

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(-1) & r(0) \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{r} = [r(-1) \quad r(-2)]$$

$$r(\zeta) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+\zeta} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i \cdot (i+\zeta)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i \cdot \zeta$$

Recordar que:

$$\sum_{l=1}^{N} i = \frac{N(N-1)}{2}; \quad \sum_{l=1}^{N} i^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$$

# Filtro de Wiener

Por lo tanto:

$$r(\zeta) = \frac{1}{N}\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} + \frac{\zeta}{N}\frac{N\cdot(N-1)}{2}$$

$$= \frac{(N-1)(2N-1)}{6} + \frac{\zeta}{2}\cdot(N-1)$$

Entonces

$$r(0) = \frac{(N-1)(2N-1)}{6}$$

$$r(1) = \frac{(N-1)(2N-1)}{6} + \frac{1}{2}(N-1)$$

$$r(-1) = \frac{(N-1)(2N-1)}{6} - \frac{1}{2}(N-1)$$

# Filtro de Wiener

$$r(-2) = \frac{(N-1)(2N-1)}{6} - (N-1)$$

Usando 10 muestras, es decir $N = 10$:

$$r(0) = \frac{(10-1)(20-1)}{6} = \frac{9x19}{6} = 28.5$$

$$r(1) = 28.5 + \frac{9}{2} = 33.0$$

$$r(-1) = 28.5 - \frac{9}{2} = 24$$

$$r(-2) = 28.5 - 9 = 19.5$$

# Filtro de Wiener

Resolviendo el sistema de ecuaciones para encontrar el vector de pesos óptimo $\underline{w}_0$:

$$R\underline{w_o} = \underline{r}$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(-1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(-1) \\ r(-2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28.5 & 33.0 \\ 24 & 28.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 19.5 \end{bmatrix}$$

$$det(R) = r(0)^2 - r(-1)r(1) = (28.5)^2 - 24 \cdot 33.0 = 20.25 \tag{1}$$

# Filtro de Wiener

$$w_1 = \frac{\left|\begin{bmatrix} r(-1) & r(1) \\ r(-2) & r(0) \end{bmatrix}\right|}{det} = \frac{(r(-1)\cdot r(0) - r(-2)\cdot r(1))}{det}$$

$$= \frac{24.0\cdot 28.5 - 19.5\cdot 5.33}{20.25} = \frac{40.5}{20.25} = 2$$

$$w_2 = \frac{\left|\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) \\ r(-1) & r(-2) \end{bmatrix}\right|}{det} = \frac{(r(0)\cdot r(-2) - r(-1)\cdot r(1))}{det}$$

$$= \frac{28.5\cdot 19.5 - 24\cdot 24}{20.25} = \frac{-20.25}{20.25} = -1$$

# Filtro de Wiener

Entonces el vector óptimo de pesos $\underline{w}_o$ es:

$$\underline{w_o} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el predictor es:

$$\widehat{x}_n = 2x_{n-1} - 1x_{n-2}$$

Con $x_n = n$

Para $x_3 = 3$ su predictor es:

$$\widehat{x}_3 = 2x_2 - 1x_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

# Filtro de Wiener

Para $x_{10} = 10$ su predictor es:

$$\widehat{x}_{10} = 2 \cdot 9 - 8 = 10$$

Para $x_n = n$ su predictor es:

$$\begin{aligned} \widehat{x}_n &= 2x_{n-1} - x_{n-2} = 2(n-1) - (n-2) \\ &= 2n - 2 - n + 2 = n \end{aligned}$$

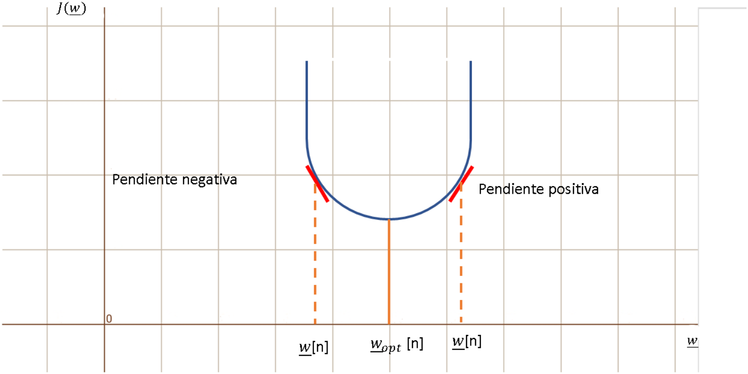
# Filtros Adaptables

A medida que el número de coeficientes del predictor se incrementa entonces la matriz de correlaciones se hace más grande y para obtener su inversa se vuelve un problema complicado, por lo tanto se requiere otra forma para encontrar los pesos $\underline{w}$ en forma iterativa.

Calcular la matriz inversa de correlaciones $R$ es un proceso engorroso, entonces se pueden usar otros métodos como el algoritmo de Levinson-Durbin, filtros adaptables, entre otros.

# Filtros Adaptables

Bernard Widrow propusó el método de los filtros adaptables.



# Filtros Adaptables

$$\underline{w}[n+1] = \underline{w}[n] + \frac{1}{2}\mu[-\bigtriangledown(n)]$$

$$\bigtriangledown(n) = \frac{\mathrm{d}J(n)}{\mathrm{d}\underline{w}(n)} = -2\underline{r} + 2R\underline{w}[n]$$

$$\underline{w}[n+1] = \underline{w}[n] + \mu[\underline{r} - R\underline{w}[n]]$$

$$\underline{r} = E\left\{\underline{u}(n-1)u^*(n)\right\} = \begin{bmatrix} E\left\{u(n-1)u^*(n)\right\} \\ E\left\{u(n-2)u^*(n)\right\} \\ \vdots \\ E\left\{u(n-M)u^*[n)\right\} \end{bmatrix}$$

$$R = E\left\{\underline{u}(n-1)\underline{u}^*(n-1)\right\}$$

# Filtros Adaptables

Usando estimadores

$$\widehat{\underline{r}}(n) = \underline{u}(n-1)u^*(n)$$

$$\widehat{R} = \underline{u}(n-1)\underline{u}^*(n-1)$$

Entonces el estimado de

$$\underline{w}[n+1] = \underline{w}[n] + \mu[\underline{r} - R\underline{w}[n]]$$

es:

$$\underline{\widehat{w}}[n+1] = \underline{\widehat{w}}[n] + \mu[\widehat{\underline{r}} - \widehat{R}\underline{\widehat{w}}[n]]$$

$$\underline{\widehat{w}}[n+1] = \underline{\widehat{w}}[n] + \mu[\underline{u}(n-1)u^*(n) - \underline{u}(n-1)\underline{u}^*(n-1)\cdot\underline{\widehat{w}}[n]]$$

# Filtros Adaptables

$$= \underline{\widehat{w}}[n] + \mu \underline{u}(n-1)\left[u^*(n) - \underline{u}^*(n-1) \cdot \underline{\widehat{w}}[n]\right]$$

Haciendo

$$E^*(n) = u^*(n) - \underline{u}^*(n-1) \cdot \underline{\widehat{w}}[n]$$

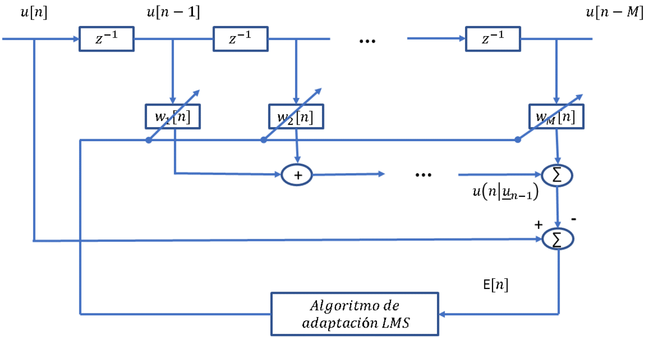
$$E(n) = u(n) - \underline{\widehat{w}}^H[n] \cdot \underline{u}(n-1) \quad \leftarrow \quad \textit{error de prediccion}$$

Si los valores de $\underline{u}$ y $\underline{\widehat{w}}$ son reales, entonces el error de predicción:

$E(n) = u(n) - \underline{\widehat{w}}[n] \cdot \underline{u}(n-1)$

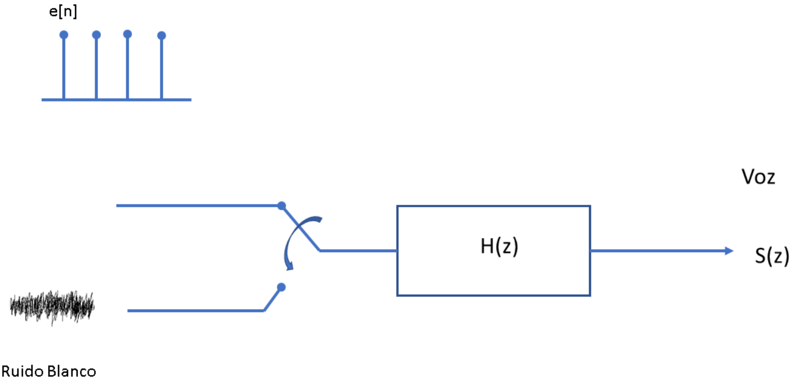
# Filtros Adaptables

Por lo tanto la formula iterativa para encontrar los pesos $\underline{w}$ es:
$\underline{\widehat{w}}[n+1] = \underline{\widehat{w}}[n] + \mu \underline{u}[n-1] \cdot E(n)$



# Tracto Vocal

Para la generación de señales de voz se tiene el modelo del tracto vocal:



# Tracto Vocal

El modelo del tracto vocal se definió anteriormente como:

$$H(z) = \frac{\sigma}{\sum_{i=0}^{M} a_i \cdot z^{-i}}$$

La relación que existe entre los pesos $\underline{w}$ encontrados por el filtro de Wiener, filtros adaptables LMS, u otros métodos como el algoritmo de Levinson y Durbin, algoritmos genéticos, etc, y los coeficientes del modelo $\underline{a}$ es la siguiente:

Sea $\underline{w}^T = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_p]$, entonces $\underline{a}^T = [1 - \underline{w}^T]$

$$\underline{a}^T = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_p] = [1 \quad -w_1 \quad -w_2 \quad \dots \quad -w_p]$$

# Tracto Vocal

$$S(z) = \frac{\sigma \cdot E(z)}{\sum_{i=0}^{M} a_i \cdot z^{-i}}$$

$$S(z)\sum_{i=0}^{M} a_i \cdot z^{i} = S(z)a_0 + S(z)a_1 z^{-1} + ... + S(z)a_m z^{-m} = \sigma \cdot E(z)$$

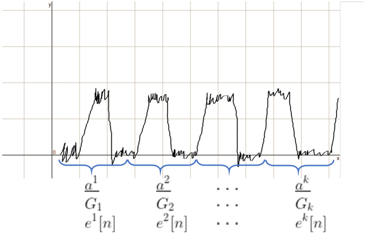
Con $a_0 = 1$

$$S(z) = \sigma \cdot E(z) - S(z)a_1 z^{-1} - ... - S(z)a_m z^{-m}$$

Obteniendo la transformada Z inversa de $S(z)$:

$$Z^{-1}\{S(z)\} = s[n] = \sigma e[n] - a_1 s[n-1] - a_2 s[n-2] \cdots - a_m s[n-m]$$

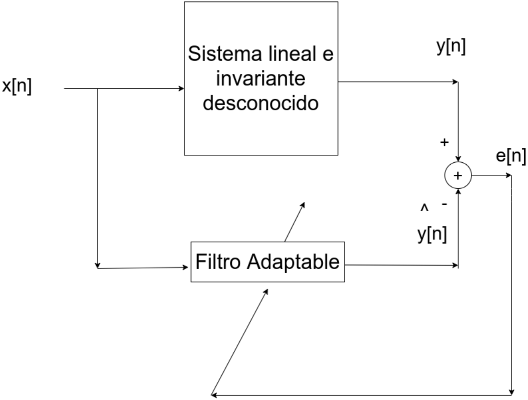
Dada una señal de voz los componentes del modelo para cada bloque de la señal $j$ que representan ésta son: $\underline{a}^j, \sigma_j, e^j[n]$




Los vectores $\underline{a}^j$ pueden ser encontrados directamente de la señal de voz usando los métodos que se indicaron anteriormente.

# Filtros Adaptables

Los filtros adaptables se pueden usar para encontrar la función de transferencia de sistema lineal e invariante en el tiempo desconocidos.



$$Y(z) = X(Z) \cdot H(z)$$

Si

$$H(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_L z^{-L}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}}$$

$$Y(z) = \frac{X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_L z^{-L})}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}}$$

# Filtros Adaptables

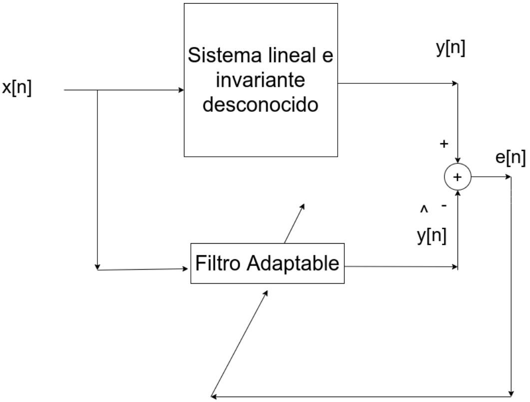
En el tiempo

$$\begin{aligned} y[n] =& b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_l x[n-l] \\ & - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_m y[n-M] \end{aligned}$$

Entonces se utilizan los filtros adaptables para encontrar los estimados de los coeficientes $b_i s$ y $a_i s$.

$$\begin{aligned} \widehat{y}[n] =& \widehat{b}_0 x[n] + \widehat{b}_1 x[n-1] + \cdots + \widehat{b}_l x[n-l] \\ & - \widehat{a}_1 \widehat{y}[n-1] - \widehat{a}_2 \widehat{y}[n-2] - \cdots - \widehat{a}_m \widehat{y}[n-M] \end{aligned}$$

# Filtros Adaptables

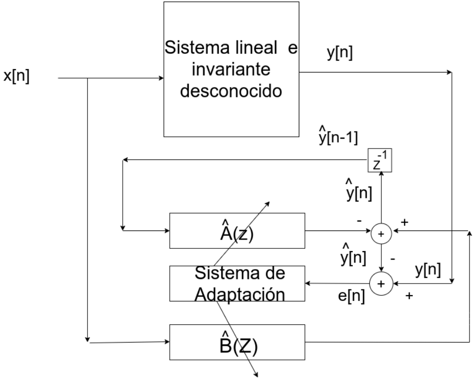



$$e[n] = y[n] - \widehat{y}[n] = y[n] - \widehat{b}_0 x[n] - \widehat{b}_1 x[n-1] - \cdots - \widehat{b}_l x[n-l]$$
$$+\widehat{a}_1 \widehat{y}[n-1] + \widehat{a}_2 \widehat{y}[n-2] + \cdots + \widehat{a}_m \widehat{y}[n-M]$$

# Filtros Adaptables

$$\hat{y}[n] = \hat{b}_0 x[n] + \hat{b}_1 x[n-1] + \cdots + \hat{b}_l x[n-l]$$
$$-\hat{a}_1 \hat{y}[n-1] - \hat{a}_2 \hat{y}[n-2] - \cdots - \hat{a}_m \hat{y}[n-M]$$

$$e[n] = y[n] - \hat{y}[n]$$



# Bibliografía


* Libro: Adaptive Filter Theory, Simon S. Haykin

* Libro: Adaptive Signal Processing, Bernard Widrow