Lección : Algoritmo de Levinson- Durbin

Dr. Jesús Savage
Dr. Carlos Rivera

18 de marzo de 2022

Índice

Algoritmo de Levinson- Durbin

Recordando que el error de predicción es:

$$f_m(n) = u(n) - \sum_{k=1}^{M} w_{ok}^* u(n-k)$$

$$J(\underline{w}) = E[\underbrace{f_m(n) f_m^*(n)}]$$

$$= \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w} - \underline{w}^H \underline{r} + \underline{w}^H R \underline{w}$$

Finalmente, el gradiente de $J(\underline{w})$ con respecto $\underline{w}$:

$$\bigtriangledown J(\underline{w}) = \frac{dJ(\underline{w})}{d\underline{w}} = \underline{0} - 2\underline{r} + \underline{0} + 2R\underline{w}$$

Por lo tanto para obtener el vector óptimo $\underline{w}_o$, es decir el mínimo de $J(\underline{w})$

$$\frac{dJ(\underline{w})}{d\underline{w}} = \underline{0} = -2\underline{r} + 2R\underline{w}$$

Solución de Wiener:

$$\underline{r} = R\underline{w} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\underline{w}_o = R^{-1}\underline{r}}$$

Algoritmo de Levinson- Durbin

Entonces con el vector óptimo $\underline{w}_o$, el error cuadrático medio mínimo es:

$$J_{min}(\underline{w}_o) = \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w}_o - \underline{w}_o^H \underline{r} + \underline{w}_o^H R \underline{w}_o$$

ya que $R\underline{w}_o = \underline{r}$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w}_0 - \underline{w}_0^H \underline{r} + \underline{w}_0^H \underline{r} \\
&= \sigma_u^2 - \underline{r}^H \underline{w}_0 = r(0) - \underline{r}^H \underline{w}_0 \\
&= E\{|f_M(n)|^2\} = P_M
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Levinson- Durbin

Agrupando estas ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}^H \\ \underline{r} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$\underline{0}$ es un vector nulo de $Mx1$ Recordar que $r^*(i-k) = r[k-i]$
$\underline{r}^H = \begin{bmatrix} r^*(-1) & r^*(-2) & \cdots & r^*(-M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(-1) & r(-2) & \cdots & r(-M) \end{bmatrix}$

Con:

$$\begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}^H \\ \underline{r} & R \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & | & r(1) & r(2) & \dots & r(M) \\ ---- & ----- & ---- & ----- & ---- & ---- \\ r(-1) & | & r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-2) & | & r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ r(-M) & | & r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

Con: $\underline{a}_M^T = [1 - \underline{w}^T]$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}^H \\ \underline{r} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}^H \\ \underline{r} & R \end{bmatrix} [\underline{a}_M]$$

$$= \begin{bmatrix} r(0) & | & r(1) & r(2) & \dots & r(M) \\ ---- & ------ & ---- & ------ & ---- & ---- \\ r(-1) & | & r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-2) & | & r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ r(-M) & | & r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} [\underline{a}_M]$$

$$= R_{M+1} \cdot \underline{a}_M = \begin{bmatrix} P_M \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

El objetivo es encontrar los coeficientes $\underline{a}_M$ en un sistema de $M+1$ ecuaciones

$$\sum_{l=0}^{M} a_{M,l} r(l-i) = \begin{cases} P_M, & i = 0 \\ 0, & i = 1, 2, \cdots M \end{cases}$$

Predicción hacia atrás

El sistema de ecuaciones encontrado es utilizando el método de predicción hacía adelante.

Se puede hacer también una predicción hacia atrás, se tiene $u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M+1)$ y se trata de predecir $u(n-M)$:

$$u(n-M\,|\underline{u}_N\,) = \sum_{k=0}^{M} g_k^* u(n-k+1)$$

Error de predicción hacia atrás:

$$b_M(n) = u(n-M) - u(n-M\,|\underline{u}_N\,)$$

Sea P_m el mínimo error cuadrático medio de predicción:

$$P_M(n) = E\left\{|b_M(n)|^2\right\}$$

Sea g el vector óptimo de $Mx1$ del predictor hacia atrás,
$\underline{g}^T = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_M \end{bmatrix}$
Para solucionar la ecuación normal para el vector g, se requiere la matriz de correlación de M por M de la entrada $\underline{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u(n-M+1) \end{bmatrix}$

$$R = E\left[\underline{u}(n)\underline{u}^H(n)\right]$$

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

Se necesita también:

$$\underline{r}^{B*} = E\left[\underline{u}(n) \quad u^*(n-M)\right]$$

$$\underline{r}^{B*T} = \left[r(M), \quad r(M-1), \quad \cdots \quad r(1)\right]$$

donde:

$$r(M-k) = E\left[u(n-k)u^*(n-m)\right], \qquad k = 0, 1, \cdots, M-1$$

Se necesita también la varianza que es igual a $r(0)$

Ecuación Normal

$$R\underline{g} = \underline{r}^{Bt}$$

Error de predicción hacia atrás

$$P_M = r(0) - \underline{r}^{BT}\underline{g}$$

error de predicción

$$b_M(n) = u(n-M) - \sum_{k=1}^{M} g^*_{M,K}\ u(n-k+1)$$

definiendo:

$$c_{M,k} = \begin{cases} -g_{k+1}, & k = 0, , 1, \cdots, M-1 \\ 1, & k = M \end{cases}$$

$$b_M(n) = \sum_{k=0}^{M} c_{M,k}^* u(n-k)$$

Se puede definir también el vector de constantes $\underline{g}$ como

$$g_{M-k+1}^* = w_{ok}, \qquad k = 1, 2, \cdots, M$$

o

$$g_k = w_{o,M-k+1}^* \quad , \qquad k = 1, 2, \cdots, M$$

$$c_{m,k} = \begin{cases} -w_{o,M-k}^* & k = 1, 2, \cdots, M-1 \\ 1, & k = M \end{cases}$$

entonces $c_{M,k} = a_{M,M-k}^*$

Entonces el error puede ser expresado en la siguiente forma:

$$b_M(n) = \sum_{k=0}^{M} a_{M,M-k} \ u(n-k)$$

Combinando la ecuación normal

$$R\underline{g} = \underline{r}^{B*}$$

y el error de predicción hacia atrás

$$P_M = r(0) - \underline{r}^{BT}\underline{g}$$

$$\begin{bmatrix} R & \underline{r}^{B*} \\ \underline{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{g} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ P_M \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$
\begin{bmatrix} R & \underline{r}^{B*} \\ \underline{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{g} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}
$$

$$
= \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(M) \\ r(-1) & r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-2) & r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ r(-M) & r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{M,M} \\ a^*_{M,1} \\ . \\ . \\ . \\ a^*_{M,0} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \underline{0} \\ P_M \end{bmatrix}
$$

Se tiene un sistema de $(M+1)$ ecuaciones

$$\sum_{l=0}^{M} a_{M,m-l}\, r(l-i) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \cdots, M-1 \\ P_M & i = M \end{cases}$$

Sea a_M (de tamaño $M+1$) el vector de coeficientes del filtro de predicción de error hacia adelante. Sea a_M^{B*} el vector de coeficientes del filtro de predicción de error hacia atrás, el cual puede ser obtenido reordenando al contrario los elementos del vector a_M y obteniendo su conjugado complejo.

$$\underline{a}_M = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}; \qquad \underline{a}_M^{B*} = \begin{bmatrix} a_M^* \\ a_{M-1}^* \\ \vdots \\ a_0^* \end{bmatrix}$$

Recursión de Levison-Durbin

1.-Predicción hacia adelante:

$$\underline{a}_m = \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m-1,0} \\ a_{m-1,1} \\ \vdots \\ a_{m-1,m-k} \\ \vdots \\ a_{m-1,m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ a_{m-1,m-1}^* \\ \vdots \\ a_{m-1,m-k}^* \\ \vdots \\ a_{m-1,1}^* \\ a_{m-1,0}^* \end{bmatrix}$$

Γ_M es una constante escalar.

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + \Gamma_m a_{m-1,m-k}^* \qquad ; \qquad k = 0, 1, \cdots, m$$

$$a_{m-1,0} = 1 \qquad y \qquad a_{m-1,m} = 0$$

2.- Predicción hacia atrás

$$\underline{a}_m^{B*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} + \Gamma_m^* \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{m,m-k}^* = a_{m-1,m-k}^* + \Gamma_m^* a_{m-1,k} \quad , \qquad k = 0, 1, \cdots, m$$

Justificación de la constante Γ_m

$$\underline{a}_m = \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix}$$

Multiplicando por R_{m+1} la matriz de correlación de las entradas en el filtro de predicción-error hacia adelante de orden m.

$$R_{m+1}\underline{a}_m = \begin{bmatrix} P_m \\ \underline{0} \end{bmatrix} = R_{m+1} \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m R_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix}$$

Particionando R_{m+1}

$$R_{m+1} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(M) \\ r(-1) & r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-2) & r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ r(-M) & r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m & \underline{r}_m^{B*} \\ \\ \underline{r}_m^{BT} & r(0) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$R_{m+1} \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m & \underline{r}_m^{B*} \\ \\ \underline{r}_m^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_m & \underline{a}_{m-1} \\ \\ \underline{r}_m^{BT} & \underline{a}_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$R_m \underline{a}_{m-1} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \\ \underline{0}_{m-1} \end{bmatrix}$$

Definase el escalar

$$\Delta_{m-1} = \underline{r}_m^{BT} \underline{a}_{m-1} = \begin{bmatrix} r(-m), & r(1-m), & \cdots & r(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1,0} \\ a_{m-1,1} \\ \vdots \\ a_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1} r(k-m)$$

entonces

$$R_{m+1} \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m & \underline{a}_{m-1} \\ \\ \underline{r}_m^{BT} & \underline{a}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \underline{0}_{m-1} \\ \Delta_{m-1} \end{bmatrix}$$

Por otra parte

$$R_{m+1} = \begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}_m^H \\ \\ \underline{r}_m & R_m \end{bmatrix}$$

$$R_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}_m^H \\ \\ \underline{r}_m & R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{r}_m^H & \underline{a}_{m-1}^H \\ R_m & \underline{a}_{m-1}^H \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_m^H \underline{a}_{m-1}^B = \begin{bmatrix} r(1) & r(2) & \cdots & r(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1,m-1}^* \\ a_{m-1,m-2}^* \\ \\ a_{m-1,0}^* \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{m-1,m-k}^{*} r(k) = \Delta_{m-1}^{*}$$

Por otra parte

$$R_m \underline{a}_{m-1}^{B*} = \begin{bmatrix} \underline{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$R_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^{*} \\ \underline{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix}$$

Regresando al principio

$$\underline{a}_m = \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix}$$

Multiplicando por R_{m+1}

$$R_{m+1}\underline{a}_m = R_{m+1}\begin{bmatrix}\underline{a}_{m-1}\\ 0\end{bmatrix} + R_{m+1}\Gamma_m\begin{bmatrix}0\\ \underline{a}_{m-1}^{B*}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}P_m\\ \underline{0}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_{m-1}\\ \underline{0}_{m-1}\\ \Delta_{m-1}\end{bmatrix} + \Gamma_m\begin{bmatrix}\Delta^*_{m-1}\\ \underline{0}_{m-1}\\ P_{m-1}\end{bmatrix}$$

Para que esta recursión se sostenga se necesita que:

$$P_m = P_{m-1} + \Gamma_m \Delta^*_{m-1}$$

$$0 = \Delta_{m-1} + \Gamma_m P_{m-1}$$

$$\Gamma_m = \frac{-\Delta_{m-1}}{\Gamma_m P_{m-1}}$$

$$\Delta_{m-1} = -\Gamma_m P_{m-1}$$

$$\Delta^*_{m-1} = -\Gamma^*_m P_{m-1}$$

Entonces:

$$P_m = P_{m-1} + \Gamma_m(-\Gamma^*_m P_{m-1}) = P_{m-1} - P_{m-1}|\Gamma_m|^2 = P_{m-1}(1 - |\Gamma_m|^2)$$

La forma de aplicar la recursión Levinson- Durvin es la siguiente:

Se cuenta con la función de autocorrelacion del proceso de entrada $r(0), r(1), \cdots, r(M)$. Función de autocorrelación para retrasos de $0, 1, \cdots, M$ respectivamente.

Estimador de la función de autocorrelación:

$$r(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-k} u(n) u^*(n-k), \qquad k = 0, 1, \cdots, M$$

en donde N es el numero de muestras, con $N >> M$. Dado $r(0), r(1), \cdots, r(M)$

La recursión empieza con:

$$\Delta_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} r(k-m)$$

y

$$P_m = P_{m-1} + \Gamma_m \Delta^*_{m-1}$$

Se empieza con $m = 0$

$$P_0 = r(0)$$
$$\Delta_0 = r(-1)$$
$$a_{m,0} = 1 \quad para\ todas\ las\ m_s$$
$$y \quad a_{m,k} = 0 \quad para\ k > m$$

El calculo termina con $m = M$

$$\underline{a}_m = \begin{bmatrix} \underline{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix}$$

$\Gamma_m = \frac{-\Delta_{m-1}}{P_{m-1}}$

Ejemplo:
Considerese un predictor de orden $p = 2$ Asumiendo que se cuenta con las correlaciones $r = (r(0), r(1), r(2))$. Encuentra los coeficientes de LPC.

Solución de Wiener.

$$\begin{bmatrix} r(0)) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \end{bmatrix}$$

Por Kramer:
$det = r(0)^2 - r(1)^2$

$$w_1 = \frac{\left|\begin{bmatrix} r(1) & r(1) \\ r(2) & r(0) \end{bmatrix}\right|}{det} = \frac{r(1)r(0) - r(2)r(1)}{r(0)^2 - r(1)^2} = -a_1$$

$$w_2 = \frac{\left|\begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(2) \end{bmatrix}\right|}{det} = \frac{r(0)r(2) - r(1)^2}{r(0)^2 - r(1)^2} = -a_2$$

Solución utilizando el algoritmo de Levinson-Durbin

Formulas Recursivas

$$\Delta_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} r(k-m); \, a_m = \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ a_{B*}^{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_m = \frac{-\Delta_{m-1}}{P_{m-1}}$$

$$P_m = P_{m-1} + r_m \Delta_{m-1};$$

$a_{m,0} = 1, \; a_{m,k=0}, \; k > m$

Ecuación Normal

$$\underline{r} - R\underline{w}_{opt} = 0$$

$$r(0) - \underline{r}^H \cdot \underline{w}_{opt} = P_M$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & \underline{r}^H \\ \underline{r} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_M = \begin{bmatrix} 1 \\ -\underline{w}_{opt}; \end{bmatrix}$$

$\underline{a}_M$ es un vector de $M + 1$ elementos Para $M = 0$

$$\Rightarrow \underline{a}_M = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$r(0) = P_M$$

$m = 0$

$$a_{0,0} = 1$$

$m = 1$

$$\Delta_{1-1} = \Delta_0 = \sum_{k=0}^{0} r(k-1) = r(-1) = r(1)$$

$$P_0 = r(0)$$

$$r_1 = \frac{-\Delta_0}{P_0} = \frac{-r(1)}{r(0)}$$

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{-r(1)}{r(0)} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-r(1)}{r(0)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_1^{B*} = \begin{bmatrix} \frac{-r(1)}{r(0)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = P_0 + \Gamma_1 A_0 = r(0) + \frac{-r(1)}{r(0)} \cdot r(1) = r(0) - \frac{r(1)^2}{r(0)}$$

$$= \frac{r(0)^2 - r(1)^2}{r(0)}$$

$m = 2$

$$\Delta_1 = \sum_{k=0}^{1} a_{1,k} r(k-2) = a_{1,0} r(-2) + a_{11} r(-1)$$

$$= r(2) - \frac{r(1)}{r(0)} r(1) = \frac{r(0)r(2) - r(1)^2}{r(0)}$$

$$\Gamma_2 = \frac{-\Delta_1}{P_1} = \frac{-\frac{r(0)r(2)-r(1)^2}{r(0)}}{\frac{r(0)^2-r(1)^2}{r(0)}} = \frac{-r(0)r(2) + r(1)^2}{r(0)^2 - r(1)^2}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-r(1)}{r(0)} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-r(0)r(2) + r(1)^2}{r(0)^2 - r(1)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-r(1)}{r(0)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-r(1)}{r(0)} + \left(\frac{-r(0)r2+r(1)^2}{r(0)^2-r(1)^2}\right)\left(\frac{-r(1)}{r(0)}\right) \\ \frac{-r(0)r(2)+r(1)^2}{r(0)^2-r(1)^2} \end{bmatrix}$$

$$a_{2,1} = \frac{-r(1)}{r(0)} + \frac{r(1)r(0)r(2) - r(1)^3}{r(0)^3 - r(1)^2 r(0)}$$

$$= \frac{-r(1)\cdot(r(0)^3 - r(1)^2 r(0)) + r(0)^2 r(1) r(2) - r(1)^3 r(0)}{r(0)(r(0)^3 - r(1)^2 r(0))}$$

$$= \frac{-r(1)r(0)^3 - r(1)^3 r(0) + r(0)^2 r(1) r(2) - r(1)^3 r(0)}{r(0)(r(0)^3 - r(1)^2 r(0))}$$

$$- \frac{-r(1)r(0)^3 + r(0)^2 r(1) r(2)}{r(0)(r(0)^3 - r(1)^2 r(0))} = \frac{-r(1)r(0)^3 + r(0)^2 r(1) r(2)}{r(0)^2 (r(0)^2 - r(1)^2)}$$

$$= \frac{-r(1)r(0) + r(1)r(2)}{r(0)^2 - r(1)^2} = a_{2,1} = -w_1$$

$$a_{2,2} = \frac{-r(0)r(2) + r(1)^2}{r(0)^2 - r(1)^2} = -w_2$$