

# Repaso 1: Procesamiento de Señales

Jesús Savage

9 de febrero de 2022

# Índice

- 1 Transformada de Laplace
- 2 Transformada Z
- 3 Transformación Bilineal

# Repaso Transformada de Laplace

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

Ejemplos:

$$L\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = -\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

**Función escalón**

$$L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

# Repaso Transformada de Laplace

Ejemplos:

$$L \{ \cos(\omega t) \} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L \{ tu(t) \} = \frac{1}{s^2}$$

$$L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$$

$$L \left\{ \int_0^{\infty} f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

# Solución de Ecuaciones Diferenciales Usando la Transformada de Laplace

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \int_0^{\infty} F(s) e^{st} ds$$

Sea la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) \\ &= a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) \end{aligned}$$

Usando la transformada de *Laplace* para resolver la ecuación diferencial (condiciones iniciales nulas).

# Solución de Ecuaciones Diferenciales Usando la Transformada de Laplace

$$s^n Y(s) + b_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) = a_m s^m X(s) + a_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + a_1 s X(s) + a_0 X(s)$$

$$\Rightarrow (s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) Y(s) = (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

# Transformada Inversa

Para encontrar la transformada inversa se puede resolver por fracciones parciales:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{s(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \\ &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} \end{aligned}$$

Cuya antitransformada de Laplace es:

$$\Rightarrow f(t) = A_0 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t}$$

# Transformada Inversa

Entonces para encontrar la constante  $A_k$  se procede de la siguiente forma:

$$(s - s_k)F(s) = \frac{(s - s_k)P(s)}{Q(s)}$$

$$= \frac{(s - s_k)}{s}A_0 + \frac{(s - s_k)}{s - s_1}A_1 + \dots + \frac{(s - s_k)}{s - s_k}A_k + \dots + \frac{(s - s_k)}{s - s_n}A_n$$

$$= \frac{(s - s_k)}{s}A_0 + \frac{(s - s_k)}{s - s_1}A_1 + \dots + A_k + \dots + \frac{(s - s_k)}{s - s_n}A_n$$

Si  $s = s_k$

$$A_k = \left[ (s - s_k) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_k}$$



## Ejemplo

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} =$$
$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}$$

$$A_0 = \left[ \frac{s(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \right]_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \left[ \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \right]_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left[ \frac{(s+3)(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \right]_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

## Ejemplo

$$F(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{6}}{s+3}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

## Polos Reales Múltiples

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - s_1)^3(s - s_2)}$$
$$= \frac{A_{13}}{(s - s_1)^3} + \frac{A_{12}}{(s - s_1)^2} + \frac{A_{11}}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2}$$

Transformada inversa

$$f(t) = A_{13} \frac{t^2}{2} e^{s_1 t} + A_{12} t e^{s_1 t} + A_{11} e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ejemplo

$$F(s) = \frac{1}{(s + 2)^3(s + 3)} = \frac{A_{13}}{(s + 2)^3} + \frac{A_{12}}{(s + 2)^2} + \frac{A_{11}}{s + 2} + \frac{A_2}{s + 3}$$

$$A_{13} = [(s + 2)^3 F(s)]_{s=-2}$$

## Polos Reales Múltiples

$$= \left[ A_{13} + A_{12}(s+2) + A_{11}(s+2)^2 + \frac{A_2(s+2)^3}{s+3} \right]_{s=-2}$$

Dando como resultado  $A_{13} = 1$

Para el término  $A_{12}$ :

$$A_{12} = \left[ (s+2)^2 F(s) \right]_{s=-2} = \left[ \frac{A_{13}}{s+2} + A_{12} + A_{11}(s+2) + \frac{A_2(s+2)^2}{s+3} \right]_{s=-2}$$

Existe una indeterminación en el primer término. Sin embargo, se puede quitar esta indeterminación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \left[ \frac{d}{ds} ((s+2)^3 F(s)) \right]_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+3} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left( A_{13} + A_{12}(s+2) + A_{11}(s+2)^2 + \frac{A_2(s+2)^3}{s+3} \right) \Big|_{s=-2} \end{aligned}$$

## Polos Reales Múltiples

$$\Rightarrow A_{12} = \left. \frac{-1}{(s+3)^2} \right|_{s=-2} = -1$$

Luego, para  $A_{11}$

$$A_{11} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s+2)^3 F(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \frac{2}{(s+3)^3} \Big|_{s=-2} = 1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} - t e^{-2t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

En general para  $r$  raíces repetidas:

$$\therefore A_{q(r-k)} = \left\{ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left[ (s-s_q)^r \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \right\}_{s=s_q}$$

# Polos Complejos Conjugados

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)}$$

Recordando que las raíces de  $As^2 + Bs + C = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ ,

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{-1(1 - \zeta^2)}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned}$$

# Polos Complejos Conjugados

Entonces con estas raíces:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)}$$
$$= \frac{A_1}{s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_2}{s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_3}{s + s_3}$$

La transformada inversa de  $F(s)$  es

$$f(t) = A_1 e^{-(\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + A_2 e^{-(\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + A_3 e^{s_3 t}$$

# Polos Complejos Conjugados

Para encontrar  $A_1$ :

$$A_1 = \left[ (s - s_1) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_1}$$
$$= \left[ (s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Para  $A_2$  se procede de la misma manera:

$$A_2 = \left[ (s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



# Polos Complejos Conjugados

Tanto  $A_1$  y  $A_2$  son números complejos conjugados, pero dado que la respuesta es real se necesita encontrar un respuesta que no contenga números complejos:

$$f(t) = A_1 e^{-\zeta\omega_n t} e^{j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} + A_2 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} + A_3 e^{s_3 t}$$

Utilizando la formula de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

de donde se puede obtener:

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

# Polos Complejos Conjugados

Eliminando los coeficientes complejos usando la definición anterior del seno.

$$f(t) = 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen} \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi \right) + A_3 e^{s_3 t}$$

$$\phi = \text{Ángulo de } A_1 + 90^\circ$$

$$A_1 = [(s - s_1)F(s)]_{s=s_1} = a_{1Re} + a_{1Im}$$

$$|A_1| = \sqrt{a_{1Re}^2 + a_{1Im}^2}$$

$$\text{Angulo}(A_1) = \tan^{-1} \left( \frac{a_{1Im}}{a_{1Re}} \right)$$

## Ejemplo

$$F(s) = \frac{10}{(s^2 + 6s + 25)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 3 - j4} + \frac{A_2}{s + 3 + j4} + \frac{A_3}{s + 2}$$

$$A_1 = [(s + 3 - j4)F(s)]|_{s=-3+j4}$$

$$= \left. \frac{10}{(s + 3 + j4)(s + 2)} \right|_{s=-3+j4}$$

$$= \frac{10}{(j8)(-1 + j4)} = \frac{10}{-32 - j8}$$

## Ejemplo

Multiplicando por el conjugado

$$\frac{10(-32 + j8)}{(-32 - j8)(-32 + j8)} = \frac{-10}{8(17)}(4 - j)$$

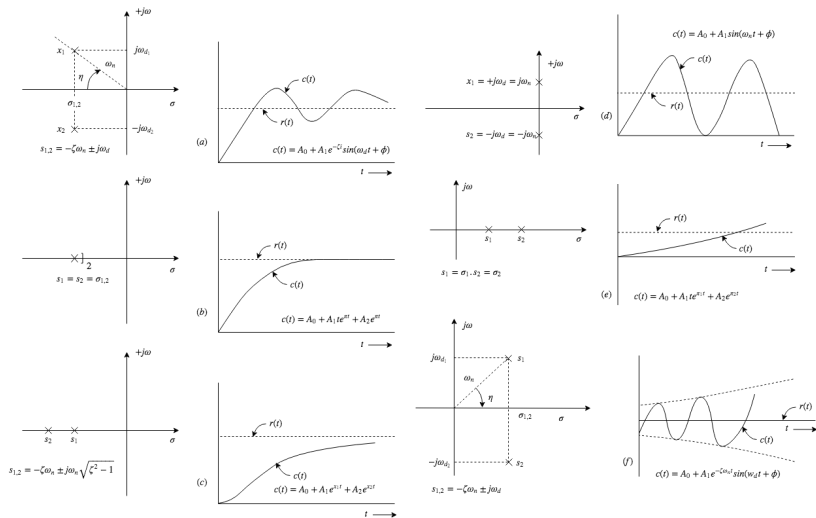
$$|A_1| = \frac{10}{8(17)}\sqrt{16 + 1} = 0.303$$

$$\text{deg}(A_1) = -194^\circ \Rightarrow \phi = -104^\circ$$

$$A_3 = [(s + 2)F(s)]_{s=-2} = 0.59$$

$$\Rightarrow f(t) = 0.606e^{-3t} \text{sen}(4t - 104^\circ) + 0.59e^{-2t}$$

# Relación entre la posición de polos y la respuesta en el tiempo



## Ejemplo de solución de ecuación diferencial usando transformada de Laplace

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y(t) + \frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{y(t) + \frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$Y(s)\left(1 + \frac{1}{2}s\right) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\left(1 + \frac{1}{2}s\right)}$$

Con  $x(t) = 1$ , para  $t \geq 0$

$$X(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

# Transformada de Laplace

Usando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}s)} = \frac{1}{s(1 + \frac{1}{2}s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + \frac{1}{2}s} =$$

Con

$$A = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2}s} \right) \Big|_{s=0} = 1$$

$$B = \left( \frac{1}{s} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{-1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}(2)}{(1 - \frac{1}{2}s)(2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

# Transformada de Laplace

*Recordar que :*

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt$$

$$= \left( \frac{-1}{(a+s)} e^{-(a+s)t} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2+s} \longleftrightarrow y(t) = 1 - e^{-2t}$$



# Transformada de Laplace

Con:

$$y(t) = 1 - e^{-2t}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2e^{-2t}$$

$$x(t) = 1, \quad t \geq 0$$

Se comprueba que la ecuación diferencial:

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt}$$

$$= x(t) - \frac{1}{2}(2e^{-2t})$$

$$= 1 - e^{-2t}$$

# Transformada Z

Sea  $x[n]$  una serie en el tiempo, su transformada Z esta dada por:

$$Z\{x[n]\} = X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$z$  es un número complejo limitado a un número de que haga que la serie converja.

# Transformada Z Unilateral

Para  $x[n] = a^n; \quad n \geq 0$

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (1); \text{ Multiplicando (1) por } az^{-1}$$

$$az^{-1}X(z) = az^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^{n+1} =$$

$$m = n + 1; \quad n = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \infty \Rightarrow m = \infty$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (az^{-1})^m = \sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (2)$$

# Transformada Z Unilateral

$$(1) - (2) \Rightarrow X(z) - az^{-1}X(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n - \sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^n = 1$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

# Transformada Z Unilateral

Ejemplo:

$$x[n] = 2^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \leftrightarrow 2^n$$

$$\text{Si } x[n] = 1^n = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

## Transformada Z Unilateral

$$y[n] = x[n - 1]$$

$$Z\{y[n]\} = Y[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n - 1]z^{-n}$$

$$= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n - 1]z^{-n}$$

$$m = n - 1; \quad n = 1 \Rightarrow m = 0$$

$$n = m + 1; \quad n = \infty \Rightarrow m = \infty$$

$$= x[-1] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)} = x[-1] + z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}$$

# Transformada Z Unilateral

Entonces:

$$Z\{x[n-1]\} = z^{-1}X(z) + x[-1]$$

Para  $y[n] = x[n-2]$

$$Y(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}X(z)$$

Para  $y[n] = x[n-m]$  con  $m > 0$

$$Y(z) = x[-m] + x[-m+1]z^{-1} + \dots + x[-1]z^{-m+1} + z^{-m}X(z)$$

$$= \sum_{k=1}^m x[k-1-m]z^{-k+1} + z^{-m}X(z)$$

# Transformada Z

Solución de ecuaciones en diferencia utilizando la transformada Z

$$a_k y_{n-k} + a_{k-1} y_{n-(k-1)} + \dots + a_0 y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_j x_{n-j}$$

$$Y(z)(a_k z^{-k} + a_{k-1} z^{-(k-1)} + \dots + a_0) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_j z^{-j})$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_j z^{-j}}{a_k z^{-k} + a_{k-1} z^{-(k-1)} + \dots + a_0}$$



## Ejemplo

Se tiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \quad (1)$$

$$x[n] = 1, \quad n \geq 0$$

$$n = -1, \quad y[-1] = 1$$

Para  $n = 0$

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

## Ejemplo

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$$

$$y[3] = x[3] + \frac{1}{2}y[2] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{16}{16} + \frac{15}{16} = \frac{31}{16}$$

## Ejemplo

Solucionando la ecuación en diferencias con la transformada Z para encontrar una solución analítica.

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$Z\{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]\} = Z\{x[n]\}$$

$$Z\{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]\} = Y(z) - \frac{1}{2}\{y[-1] + z^{-1}Y(z)\}$$

$$x[n] = 1, \quad n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Z\{x[n]\} = X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

## Ejemplo

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Usando fracciones parciales para el segundo termino:

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

Encontrando los valores de A y B:

$$A = \left( \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \Big|_{z^{-1}=2} = \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \Big|_{z^{-1}=2} = -1$$

$$B = \left( \frac{1 - z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \Big|_{z^{-1}=1} = \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \Big|_{z^{-1}=1} = 2$$

## Ejemplo

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}$$

entonces

$$Z\{Y(z)\}^{-1} = y[n] = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

## Ejemplo

$$y[n] = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comparando esta función analítica con los resultados anteriores:

$$y[0] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y[1] = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$y[2] = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{8} = \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$y[3] = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{32}{16} - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

# Función Analítica

Para la ecuación en diferencias:

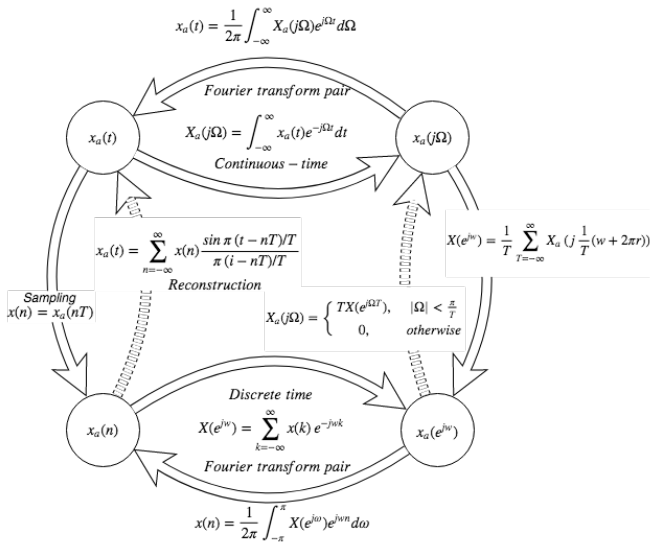
$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

La solución analítica es:

$$y[n] = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La diferencia fundamental con la solución analítica es que se puede encontrar para cualquier  $N$  el valor de  $y[n]$  en forma instantánea, de la otra forma se tendría que evaluar la ecuación en diferencias con  $n = 0, n = 1, \dots, n = N$ .

# Relación entre las Transformadas de Laplace y Z





## Relación entre las Transformadas de Laplace y Z

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

En donde  $s$  es un número complejo.

Si  $s = j\omega$  la transformada de Laplace se convierte en la transformada de Fourier:

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

La transformada discreta de Fourier es:

$$F\{x[n]\} = X[e^{-j\omega}] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

## Relación entre las Transformadas de Laplace y Z

$$F\{x[n]\} = X[e^{-j\omega}] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Si  $e^{-j\omega} = z$  entonces esta transformada se convierte en la transformada Z.

$$Z\{x[n]\} = X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Con  $s = j\omega$ ,  $z$  se convierte en  $z = e^{sT}$   
Donde  $T$  es el periodo del muestreo.

# Transformada Bilineal

Si se cuenta con una función de transferencia en el dominio de Laplace

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Se requiere una función que transforme de *Laplace* a *Z* ( $s \rightarrow z$ ) conservando los polos estables.

$$\text{Con } z = e^{sT} \Rightarrow s = \frac{1}{T} \ln(z)$$

# Transformada Bilineal

Aproximando el logaritmo por una serie de Taylor

$$\frac{1}{T} \ln(z) = \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^7 + \dots \right]$$

$$\approx \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

$$H_d(z) = [H(s)]_{s=\frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)} = H \left( \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right)$$

# Transformada Bilineal

## Bibliografía

John J. D'Azzo Linear Control System Analysis & Design, McGraw-Hill Inc, 1988