Repaso 2: Procesamiento de Señales

Dr. Jesús Savage

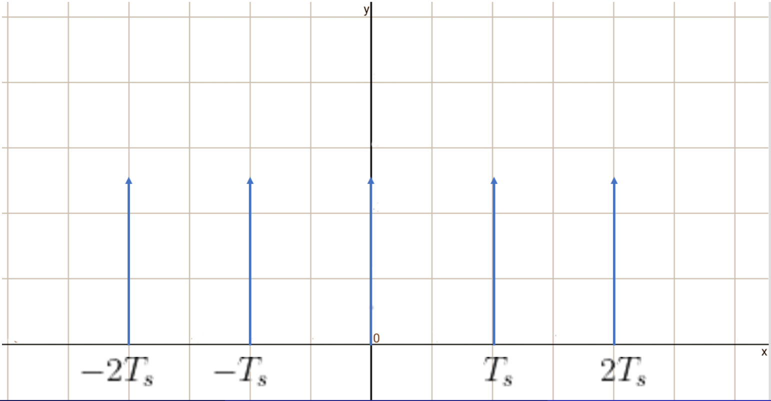
9 de febrero de 2022

Índice

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier de un tren de impulsos

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$



Transformada de Fourier

Usando Series de Fourier para representar $f(t)$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_s t}$$

en donde:

$$F_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} f(t) e^{-jnw_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-jnw_s t} dt$$

Transformada de Fourier

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t)e^{-jnw_s t}dt = \frac{1}{T_s} = F_n$$

Usando la siguiente propiedad de la función $\delta(t)$:

$$\int \delta(t)n(t)dt = n(0)$$

Transformada de Fourier

Entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jnw_s t} \qquad ;$$

Por lo tanto su transformada de Fourier es:

$$F(f(t)) = F(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{-jnw_s t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnw_s t} e^{-jwt} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jnw_s t} e^{-jwt} dt$$

Transformada de Fourier

Por otra parte la transformada inversa de Fourier

$$F^{-1}\{G(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{jwt}dw = g(t)$$

$$F^{-1}\{\delta(w - nw_s)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s)e^{jwt}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{jnw_s t}$$

Entonces:

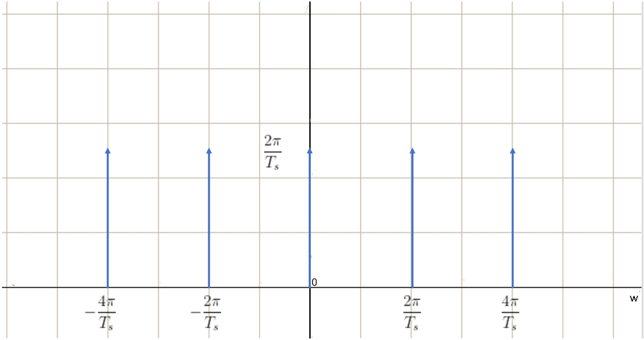
$$\Rightarrow F\{e^{jnw_s t}\} = 2\pi\delta(w - nw_s)$$

$$F\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}e^{jnw_s t}\} = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s)$$

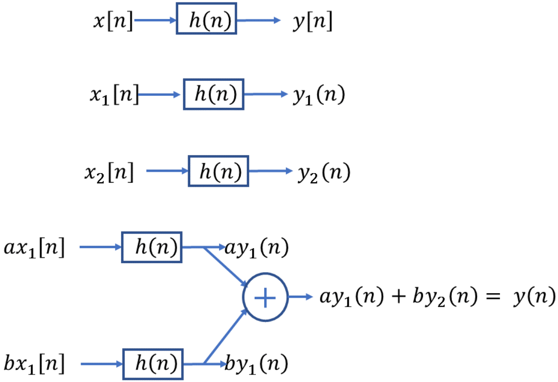
Transformada de Fourier

$$w_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Por lo tanto la transformada de Fourier de un tren de impulsos en el tiempo es otro tren de impulsos en el dominio de la frecuencia:



Sistema lineal e Invariante en el Tiempo



Sistema lineal e Invariante en el Tiempo

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$x_1[n+k] \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n+k)$$

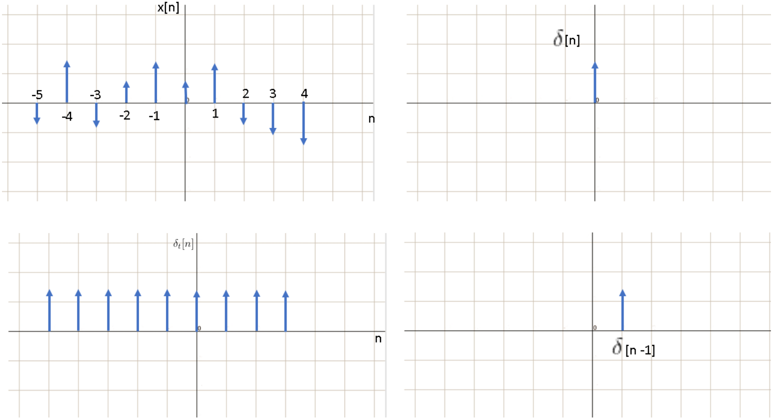
$$x[t] \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y[t]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} x(n-k)h(k)$$

Convolución

$$x_t[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$$\delta_t[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$

Convolución

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow h(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$x_t(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow \sum x_t(n)\, h(n-k) \quad = y[n]$$