Lección 7: Simulación de cadenas de Markov

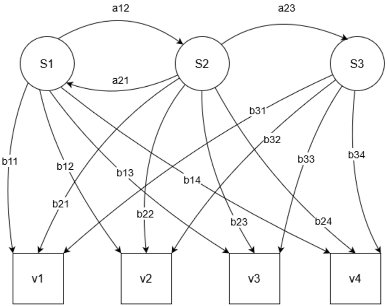
Jesús Savage
Carlos Rivera

23 de abril de 2020

Índice

HMM como generador de Observaciones

Dados el número de estados N, el número de símbolos M, la matriz de probabilidad de transiciones entre estados A, la matriz de probabilidad de generación de los simbolos B y el vector de probabilidades de estado inicial π; la HMM puede ser usada como un generador de secuencia de observaciones $O = (O_1, O_2, ..., O_T)$ en donde cada una de las observaciones O_t es uno de los símbolos V y T es el número de observaciones en la secuencia.



HMM como generador de Observaciones

Esta secuencia podría ser generada de la siguiente forma:

1 Escojase un estado inicial $q_1 = i$ de acuerdo a la distribución del estado inicial π. Dado el vector de probabilidades de estado inicial:

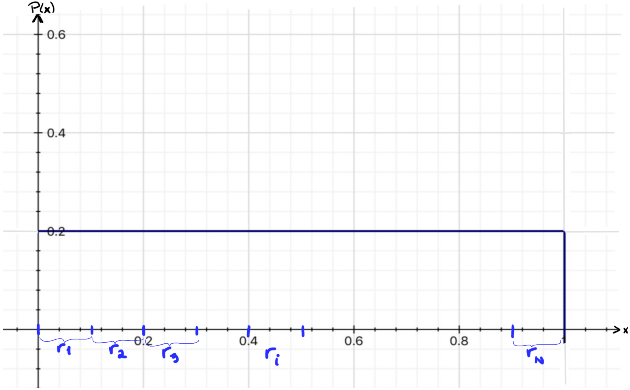
$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_i, \cdots, \pi_N]$$

Con este vector generar una tabla como se muestra a continuación:

State i	Range	r
1	$[0, \pi_1)$	r_1
2	$[\pi_1, \pi_1 + \pi_2)$	r_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$\left[\sum_{j=1}^{i-1} \pi_j, \sum_{j=1}^{i} \pi_j\right)$	r_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$\left[\sum_{j=1}^{N-1} \pi_j, 1\right)$	r_N

Simulación de cadenas de Markov

Generar un número aleatorio x con un distribución uniforme entre $[0, 1]$
Encontrar en que rango quedo el valor de x:
Si $0 \leq x < r_1$ se inicia en el estado 1, es decir el estado inicial $q_1 = 1$
Si $r_j \leq x < r_{j+1}$ se inicia en el estado $j + 1$, $q_1 = i$, con $i = j + 1$



Simulación de cadenas de Markov

2 Ponga $t = 1$.

3 Escojase $O_t = V_k$ de acuerdo a la distribución de probabilidad de los símbolos en el estado, es decir, $b_i(k)$.

Dada la matriz de probabilidad de generación de simbolos B:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{iM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix}$$

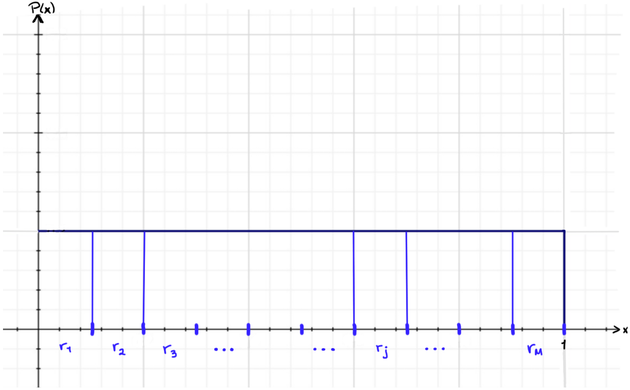
Simulación de cadenas de Markov

Con el estado $q_t = i$ generar una tabla con los valores del renglon i de la matriz B, como se muestra a continuación:

Símbolo	Rango	región
1	$[0, b_{i1})$	r_1
2	$[b_{i1}, b_{i1} + b_{i2})$	r_2
3	$[b_{i1} + b_{i2}, b_{i1} + b_{i2} + b_{i3})$	r_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$\left[\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}, \sum_{k=1}^{j} b_{ik}\right)$	r_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M	$\left[\sum_{k=1}^{M-1} b_{ik}, 1\right)$	r_M

Simulación de cadenas de Markov

Generar un número aleratorio x con un distribución uniforme entre $[0,1]$
Encontrar en que rango quedo el valor de x:
Si $0 \leq x < r_1$, se genera el simbolo 1, es decir $O_t = V_1$.
Si $r_j \leq x < r_{j+1}$, se genera el simbolo $j+1$, $O_t = V_k$ con $k = j+1$.



Simulación de cadenas de Markov

4 Pasar al estado nuevo q_{t+1} de acuerdo a la distribución de probabilidad de transición de estados.

Dada la matriz de probabilidad de transiciones entre estados A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

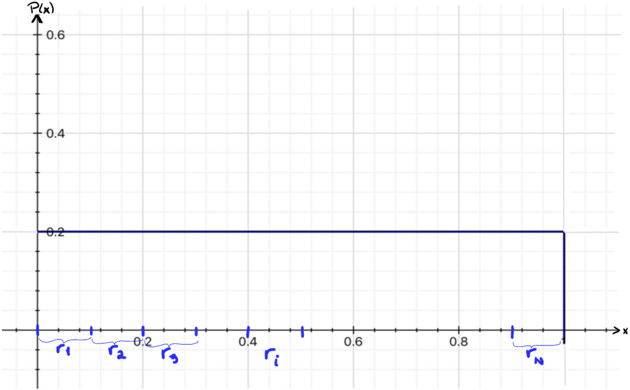
Simulación de cadenas de Markov

Con el estado $q_t = i$ generar una tabla con los valores del renglon i de la matriz A, como se muestra a continuación:

State j	Range	r
1	$[0, a_{i1})$	r_1
2	$[a_{i1}, a_{i1} + a_{i2})$	r_2
3	$[a_{i1} + a_{i2}, a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})$	r_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$\left[\sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}, \sum_{k=1}^{j} a_{ik}\right)$	r_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$\left[\sum_{k=1}^{N-1} a_{ik}, \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\right)$	r_N

Simulación de cadenas de Markov

Generar un número aleatorio x con un distribución uniforme entre $[0, 1]$
Encontrar en que rango quedo el valor de x:
Si $0 \leq x < r_1$, se pasa al estado 1, es decir el estado siguiente $q_{t+1} = 1$
Si $r_j \leq x < r_{j+1}$, el estado siguiente $q_{t+1} = i$, con $i = j + 1$



Simulación de cadenas de Markov

5 Ponga $t = t + 1$; regrese al paso 3 si $t < T$, de otra forma termine el procedimiento.

Al final se tendra la simulación de los estados y las observaciones generadas:

Tiempo	1	2	3	...	T
Estado	q_1	q_2	q_3	...	q_T
Observación	O_1	O_2	O_3	...	O_T