

Lección 14: Control de un Robot Móvil

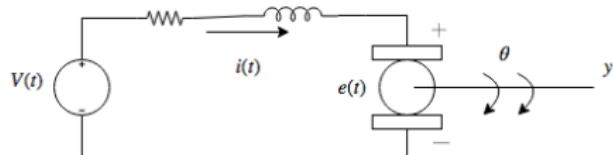
Jesús Savage

16 de diciembre de 2020

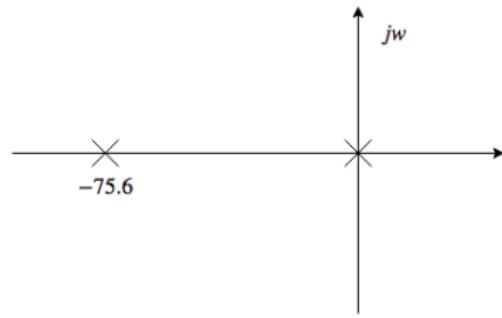
Índice

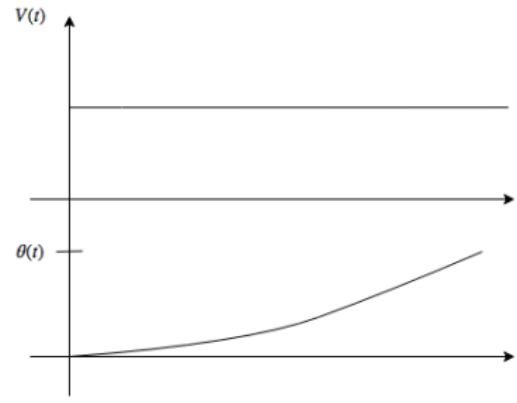
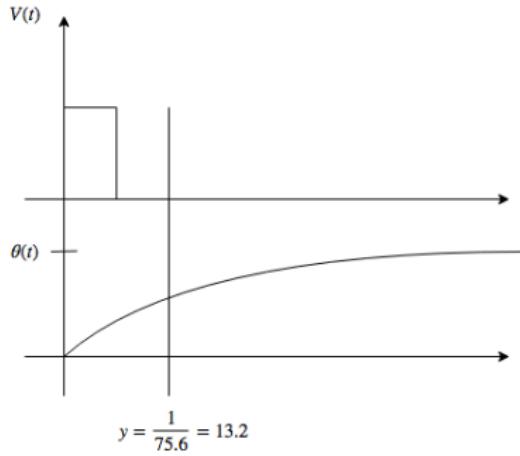
- ① Control de Motores Eléctricos
- ② Control de Robots Móviles

Motores de Corriente Directa



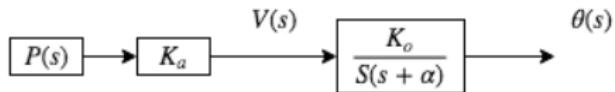
$$\frac{\Theta(S)}{V(S)} = \frac{2292.2}{s(s + 75.03)}$$



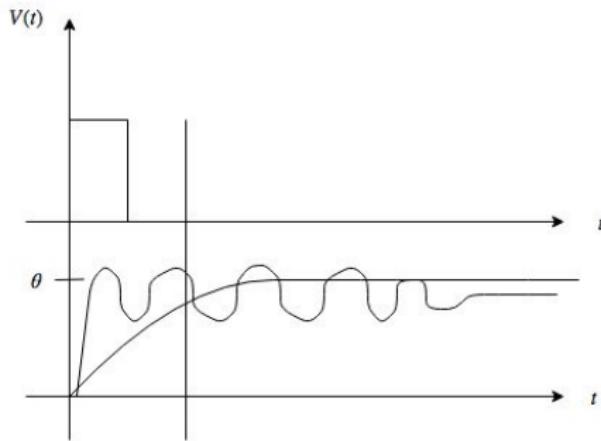


Lazo Abierto

Posición de Referencia

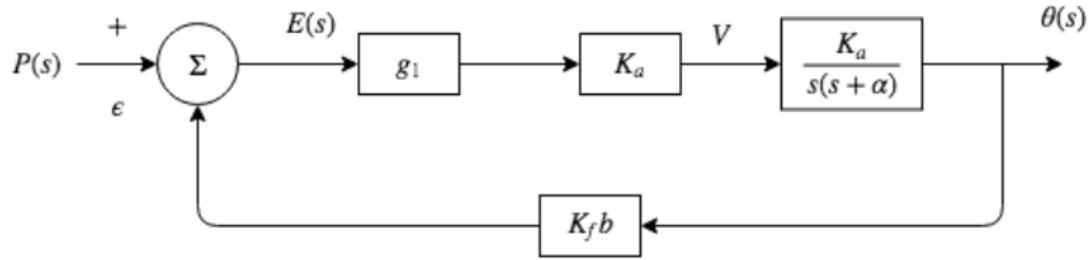


Se requiere mejorar el tiempo de subida y el error en estado estable.



Retroalimentado

Posición de Referencia



Usando retroalimentación.

Ecuaciones

$$E(s) = P(s) - K_f \theta(s)$$

$$\theta(s) = E(s)(g_1 \cdot K_a \cdot \frac{K_0}{s(s + \alpha)})$$

$$= (P(s) - K_f \theta(s))(\frac{g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)})$$

$$= \frac{P(s)g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)} - \frac{\theta(s) \cdot K_f \cdot g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)}$$

$$\theta(s) + \frac{\theta(s) \cdot K_f \cdot g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)} = \frac{P(s) \cdot g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)}$$

$$\frac{\theta(s)}{P(s)} = \frac{\frac{g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)}}{1 + \frac{K_f \cdot g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha)}} = \frac{g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s(s + \alpha) + K_f \cdot g_1 \cdot K_a \cdot K_0}$$

Ecuaciones

$$\frac{\theta(s)}{P(s)} = \frac{g_1 \cdot K_a \cdot K_0}{s^2 + \alpha s + g_1 \cdot K_a \cdot K_0 \cdot K_f}$$

Haciendo:

$$K_f = 1$$

$$W_n^2 = g_1 \cdot K_a \cdot K_0$$

$$\alpha = 2 \cdot \xi \cdot W_n$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2 \cdot W_n}$$

$$\frac{\theta(s)}{P(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Ecuaciones

si $p(t)$ es un escalon $\Rightarrow P(s) = \frac{1}{s}$

$$\theta(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)}$$

Recordando que las raices de $As^2 + Bs + C = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$,

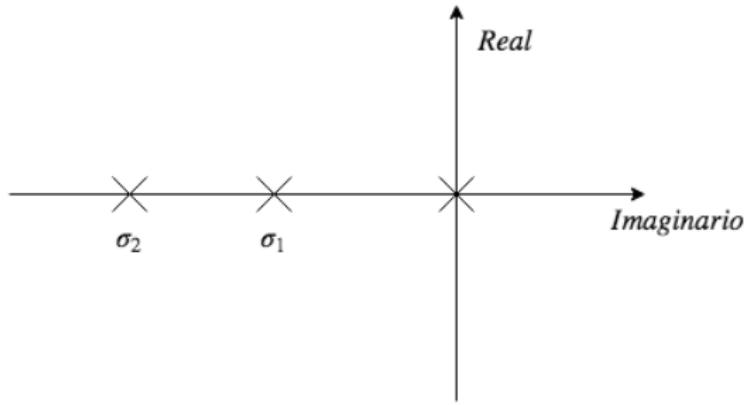
$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{-1(1 - \xi^2)}}{2} \\ &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\end{aligned}$$

Ecuaciones

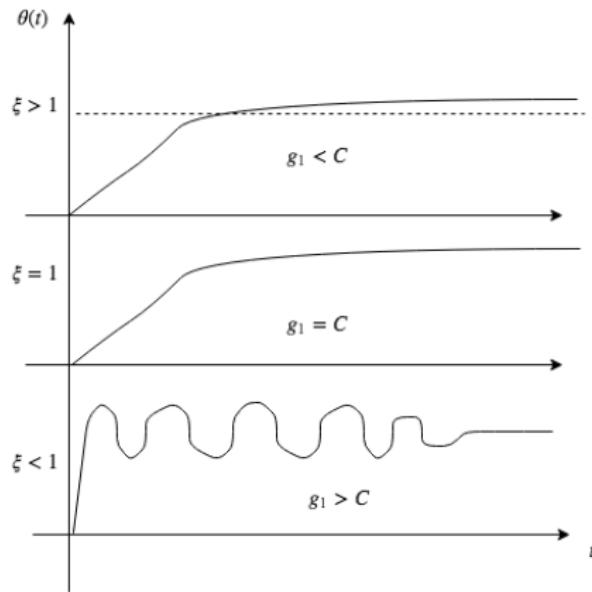
Usando fracciones parciales

$$\theta(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - \sigma_1} + \frac{A_2}{s - \sigma_2}$$

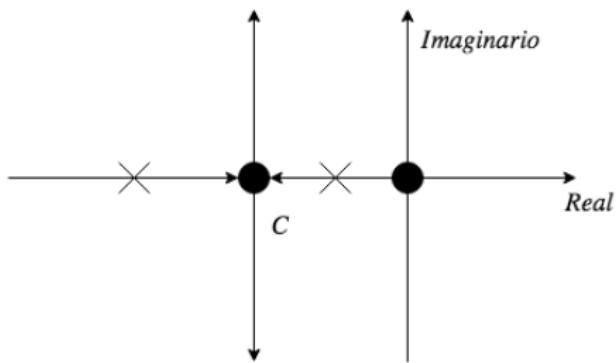
$$\theta(t) = \underbrace{A_0}_{\text{Componente fijo}} + \underbrace{A_1 e^{\sigma_1 t} + A_2 e^{\sigma_2 t}}_{\text{Componente Transitorio}}$$



Ecuaciones



Ecuaciones

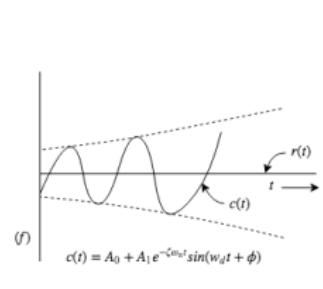
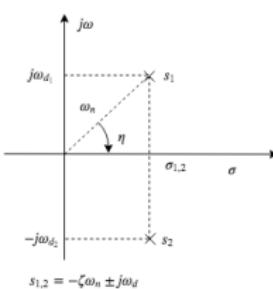
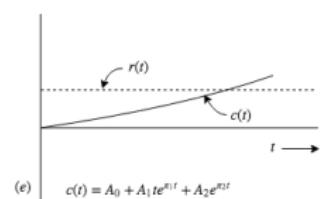
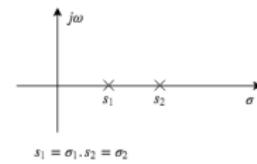
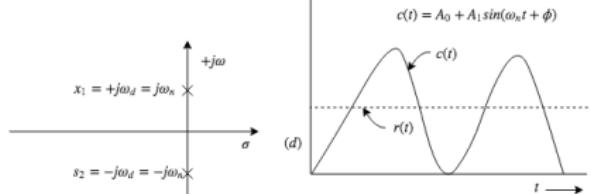
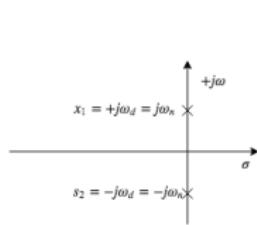
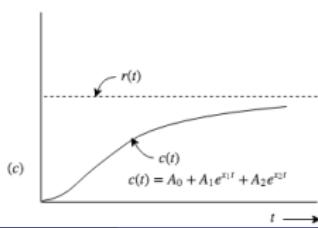
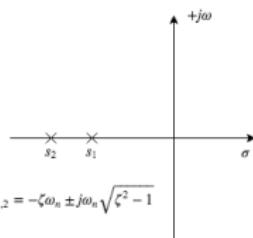
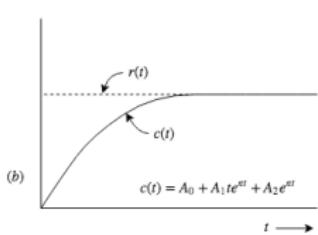
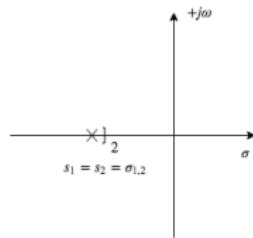
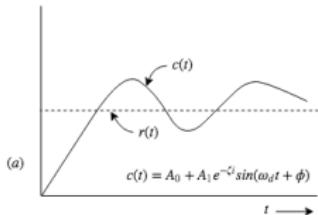
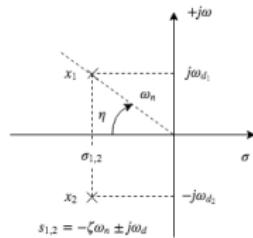


Polos reales múltiples.

$$Q(t) = A_0 + A_{12}te^{s_1 t} + A_{11}e^{s_1 t}$$

La posición de las raíces depende de la ganancia.

Raíces de una ecuación característica de segundo orden



Control On-Off de un Motor Eléctrico

El motor se prende o se apaga dependiendo si la velocidad del motor está abajo o arriba de la velocidad deseada.

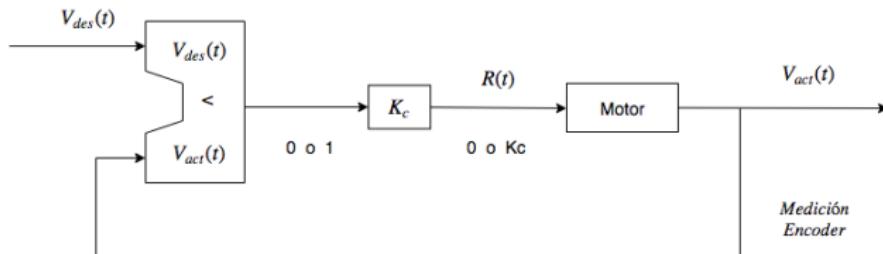
$R(t)$ Función que controla el motor.

$V_{act}(t)$ Velocidad el motor.

$V_{des}(t)$ Velocidad deseada.

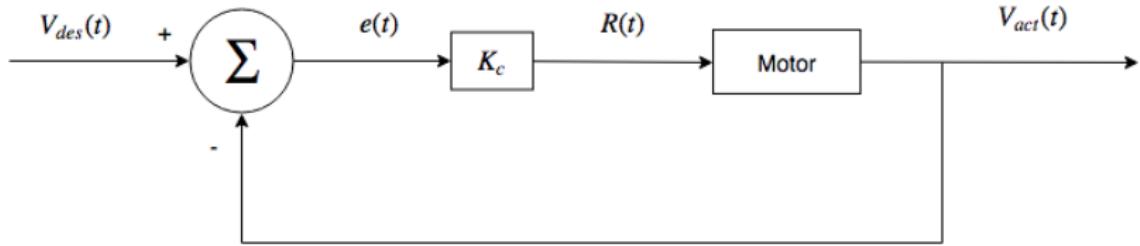
K_c Valor de la constante de control.

$$R(t) = \begin{cases} K_c & \text{si } \|V_{act}(t) - V_{des}(t)\| > K_c \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$



Control Proporcional de un Motor Eléctrico

$$R(t) = K_P \cdot (V_{des}(t) - V_{act}(t))$$

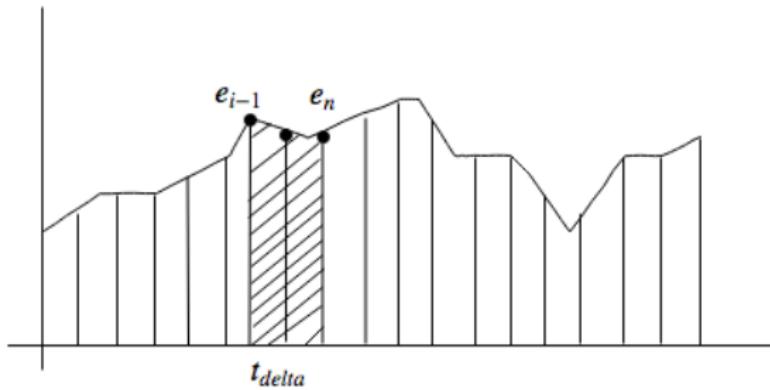


Control Integral y Proporcional de un Motor Eléctrico

La idea para incluir el controlador integral es reducir el error de estado estable del controlador P.

$$R(t) = K_P [e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) dt]$$

La integral se sustituye con la regla trapezoidal:



$$\frac{e_i + e_{i-1}}{2}, t_{delta}$$

Control Integral y Proporcional de un Motor Eléctrico

$$R(t) = K_P [e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) dt]$$

Discretizando

$$R_n = K_P \cdot e_n + \frac{K_p}{T_i} \cdot t_\delta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{e_i + e_{i-1}}{2}$$

Usando recursividad:

$$R_n - R_{n-1} = K_P \cdot (e_n - e_{n-1}) + \frac{K_P}{T_i} \cdot t_\delta \cdot \frac{(e_n + e_{n-1})}{2}$$

$$R_n = R_{n-1} + K_P \cdot (e_n - e_{n-1}) + K_I \cdot \frac{(e_n + e_{n-1})}{2}$$

Control Derivativo Proporcional de un Motor Eléctrico

Se pone una derivada para hacerlo más rápido.

$$R(t) = K_P \left[e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Control Derivativo, Proporcional e Integral de un Motor Eléctrico

$$R(t) = K_P \left[[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt] + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

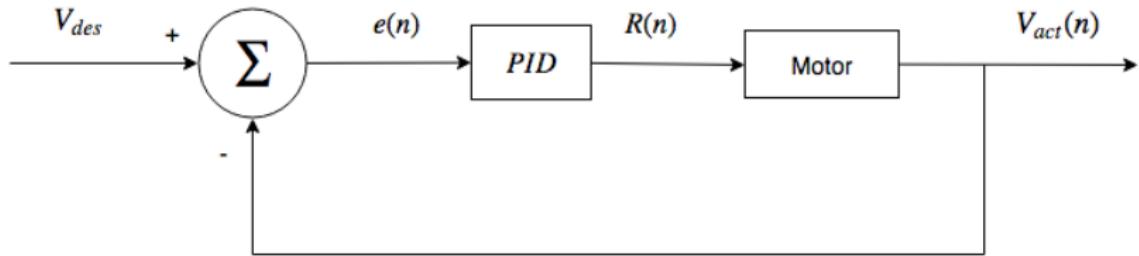
En forma discreta:

$$R_n = K_P \cdot e_n + \frac{K_P \cdot t_\delta}{T_i} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{e_i + e_{i-1}}{2} + \frac{K_P T_D}{t_\delta} \cdot (e_n - e_{n-1})$$

$$K_I = \frac{K_P}{T_i} t_\delta \quad ; \quad K_D = \frac{K_P T_D}{t_\delta}$$

Control Derivativo, Proporcional e Integral de un Motor Eléctrico

$$R_n - R_{n-1} = K_P \cdot (e_n - e_{n-1}) + K_I \cdot \frac{(e_n + e_{n-1})}{2} + K_D \cdot (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \quad (1)$$
$$R_n = R_{n-1} + K_P \cdot (e_n - e_{n-1}) + K_I \cdot \frac{(e_n + e_{n-1})}{2} + K_D \cdot (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2})$$

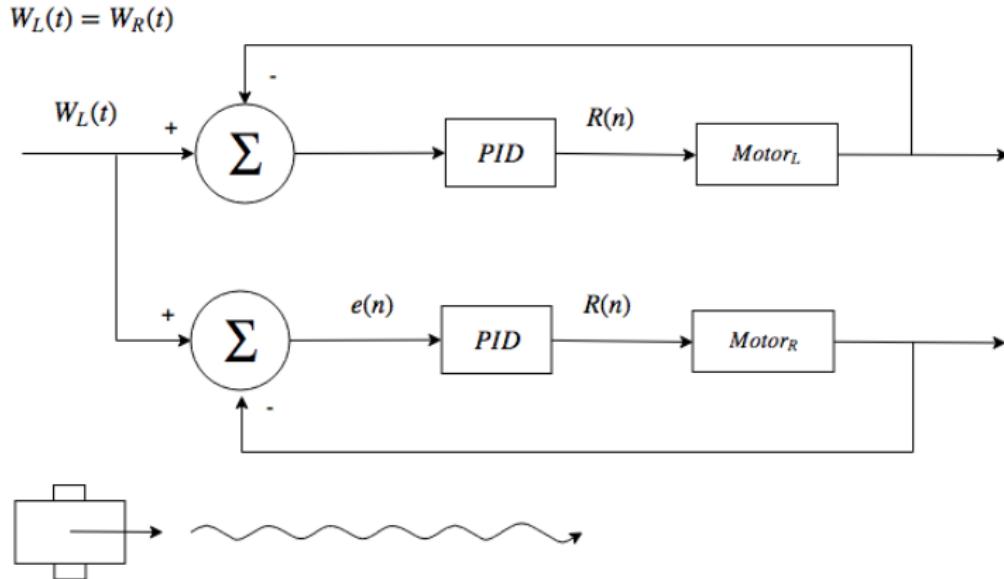


Afinación de Parámetros del Control PID

1. Seleccionar una velocidad, quitar las partes integral y derivativa, $K_I = 0$ y $K_D = 0$. Después incrementar K_P a un máximo o hasta que ocurra una oscilación.
2. Si el sistema oscila, dividir K_P por 2.
3. Incrementar K_D y observe el comportamiento cuando se incremente/dicremente la velocidad deseada por 5 %. Escoger un valor de K_D el cual de una respuesta amortiguada (damped).
4. Poco a poco incremente K_I hasta que una oscilación ocurra. Entonces divida K_I por 2 o 3.
5. Revisar si el desempeño total es satisfactorio bajo condiciones típicas.

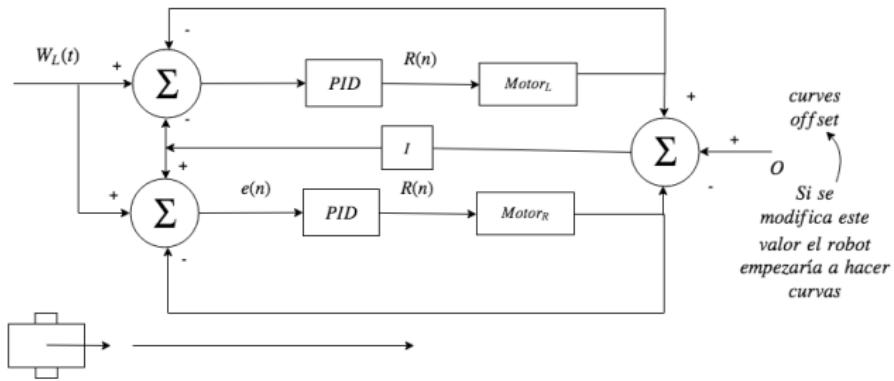
Control de un Robot Móvil

Robot móvil con dos motores navegando en línea recta:



Control de un Robot Móvil

Robot móvil con dos motores navegando en línea recta:



Cinemática de un Robot Móvil

De las ecuaciones de cinemática del robot móvil:

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = 2\pi r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix}$$

V es la velocidad lineal del robot.

W es la velocidad rotacional del robot.

ω_L es la velocidad angular de la llanta izquierda.

ω_R es la velocidad angular de la llanta derecha.

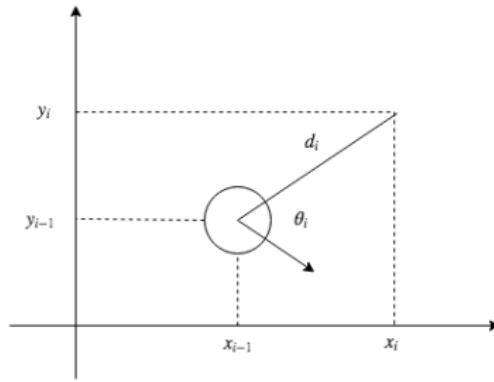
Cinemática de un Robot Móvil

Si se conocen las velocidades lineal y angular del robot V y W se pueden encontrar las velocidades angulares de cada uno de las llantas conectadas a los motores ω_L y ω_R :

$$\begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi r} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{d}{2} \\ 1 & \frac{d}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

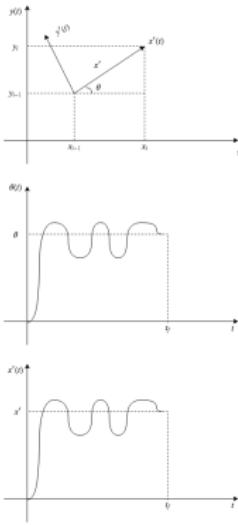
Perfiles de Velocidad

Si el robot se encuentra en la posición (x_{i-1}, y_{i-1}) y se desea llegar a la posición (x_i, y_i) el robot primero gira un ángulo θ_i y después avanza una distancia d_i .



Trayectorias

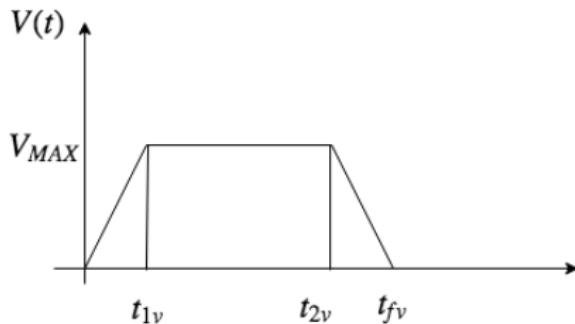
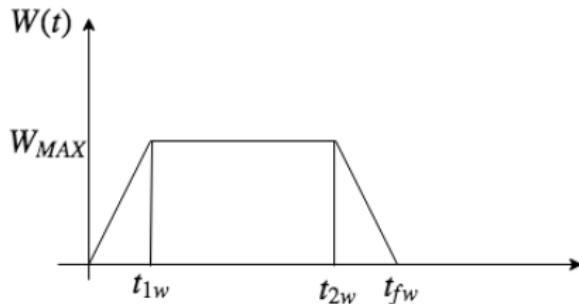
Para alcanzar el ángulo θ_i se cuenta con un tiempo t_f y para avanzar la distancia d_i también se cuenta con el tiempo t_f .



Para llegar a la posición (x_i, y_i) se necesitan encontrar los perfiles de velocidades rotacional $W(t)$ y lineal $V(t)$ del robot.

Perfiles de Velocidad

Se cuenta con las velocidades máximas del robot para avance lineal y rotacional, V_{MAX} y W_{MAX} , respectivamente.



Perfiles de Velocidad de Rotación

Ya que primero el robot gira y después avanza.

$$\omega_1(t) = \begin{cases} W(t) & 0 \leq t < t_{fw} \\ 0 & t_{fw} \leq t \leq t_{fw} + t_{fv} \end{cases}$$

$$v_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_{fw} \\ V(t) & t_{fw} \leq t \leq t_{fw} + t_{fv} \end{cases}$$

Perfiles de Velocidad de Rotación

Para los giros

$$\omega_L(t) = \frac{-d}{4\pi r} \omega_1(t);$$

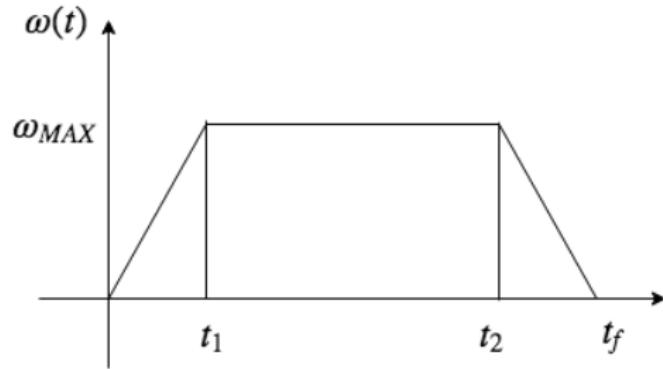
$$\omega_R(t) = \frac{d}{4\pi r} \omega_1(t);$$

Donde d es la distancia en las llantas del robot y r es el radio de las llantas. Se usa el mismo perfil pero en sentido contrario.

$$\omega_L(t) = -\omega_R(t)$$

Se tienen las velocidad máximas de giro del robot.

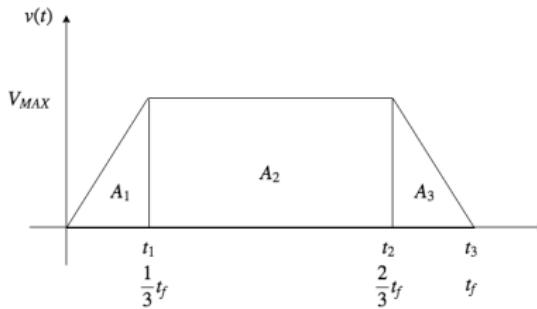
Velocidad Angular



$$\omega_1(t) = \begin{cases} \frac{\omega_{MAX}}{t_1} t, & 0 \leq t < t_1 \\ \omega_{MAX}, & t_1 \leq t < t_2 \\ \omega_{MAX} - \frac{\omega_{MAX}(t-t_2)}{t_f-t_2}, & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

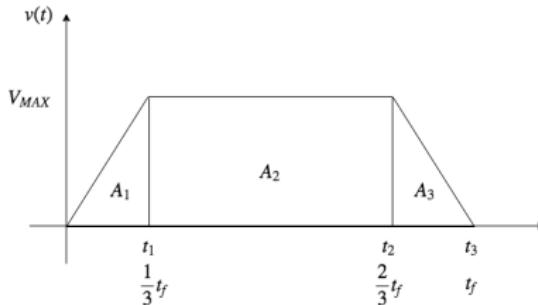
Velocidad Angular

Dado este perfil de velocidad angular y el angulo deseado θ el objetivo es encontrar el tiempo t_f . Para encontrar el tiempo t_f es necesario integrar el perfil de velocidad angular para encontrar la posición de giro del robot θ . Dividiendo en tres partes el área de integración como se muestra en la siguiente figura:



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Velocidad Angular



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} t_f W_{MAX} \right) = \frac{1}{6} (t_f W_{MAX})$$

$$A_2 = \left(\frac{2}{3} t_f - \frac{1}{3} t_f \right) V_{MAX} = \frac{1}{3} (t_f W_{MAX})$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left(t_f - \frac{2}{3} t_f \right) V_{MAX} = \frac{1}{6} (t_f W_{MAX})$$

$$A = \frac{2}{6} (t_f W_{MAX}) + \frac{2}{6} t_f W_{MAX} = \frac{2}{3} t_f W_{MAX} = \theta(t_f) = \theta$$

Velocidad Angular

$$t_f = \frac{3}{2} \frac{\theta}{\omega_{MAX}}$$

Ejemplo:

$$\omega_{MAX} = \frac{8\pi}{s}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$t_f = \frac{3}{2} \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{8\pi}{s}} = \frac{3}{2} \frac{\pi s}{32\pi} = \frac{1 \cdot s}{48}$$

$$t_1 = \frac{1}{3} t_f = \frac{s}{3 \cdot 48}$$

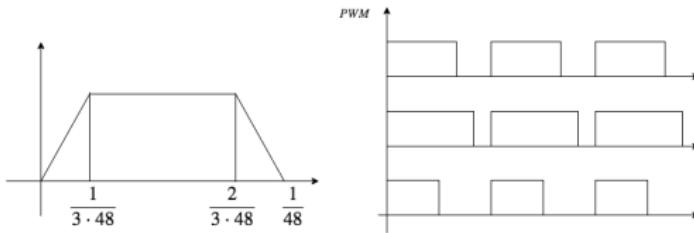
$$t_2 = \frac{3}{2} t_f = \frac{2 \cdot s}{3 \cdot 48}$$

Velocidad Angular

Con la velocidad $\omega_1(t)$ se encuentran el perfil de las velocidades de las llantas izquierda y derecha:

$$\omega_L(t) = \frac{-d}{4\pi r} \omega_1(t); \quad \omega_R(t) = \frac{d}{4\pi r} \omega_1(t);$$
$$\omega_L(t) = -\omega_R(t)$$

Perfil de velocidad de la llanta izquierda $\omega_L(t)$ y su transformación usando PWM:



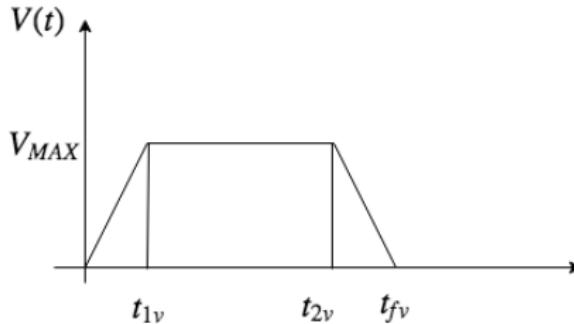
Perfiles de Velocidad Lineal

Para el avance

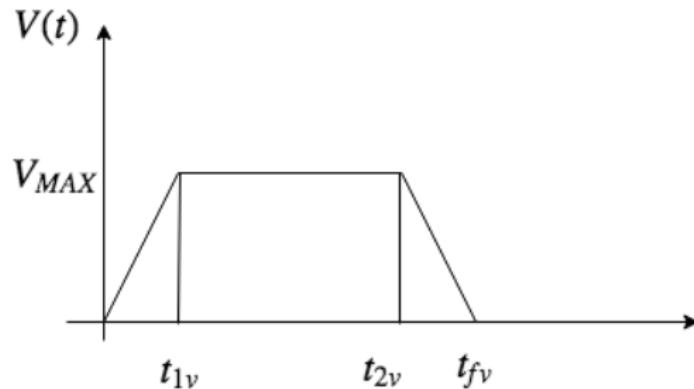
$$\omega_L(t) = \frac{v_1(t)}{2\pi r};$$

$$\omega_R(t) = \frac{v_1(t)}{2\pi r};$$

$$\omega_L(t) = \omega_R(t)$$

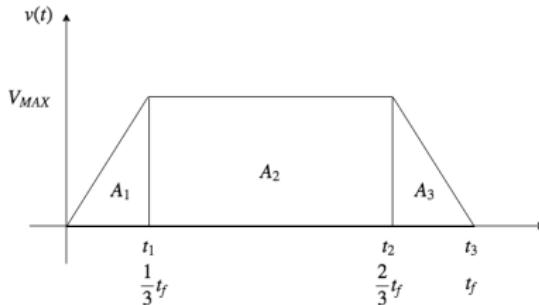


Velocidad Lineal



$$v_1(t) = \begin{cases} \frac{V_{MAX}}{t_1} t, & 0 \leq t < t_1 \\ V_{MAX}, & t_1 \leq t < t_2 \\ V_{MAX} - \frac{V_{MAX}(t-t_2)}{t_f-t_2}, & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

Velocidad Lineal



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} t_f V_{MAX} \right) = \frac{1}{6} (t_f V_{MAX})$$

$$A_2 = \left(\frac{2}{3} t_f - \frac{1}{3} t_f \right) V_{MAX} = \frac{1}{3} (t_f V_{MAX})$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left(t_f - \frac{2}{3} t_f \right) V_{MAX} = \frac{1}{6} (t_f V_{MAX})$$

$$A = \frac{2}{6} (t_f V_{MAX}) + \frac{2}{6} t_f V_{MAX} = \frac{2}{3} t_f V_{MAX} = x(t_f) = d_i$$

Velocidad Lineal

$$t_f = \frac{3}{2} \frac{d_i}{V_{MAX}}$$

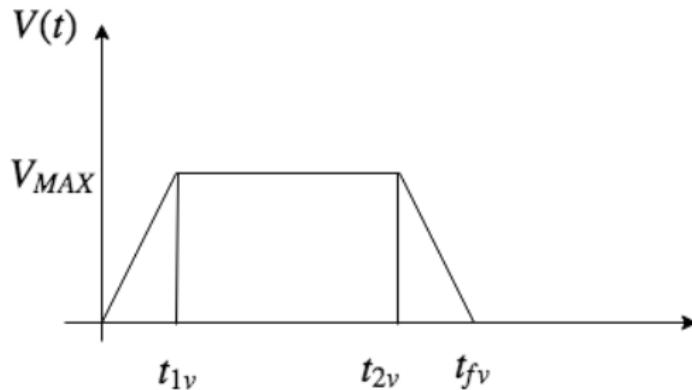
Ejemplo : $d_i = 1dm$

$$V_{MAX} = \frac{10dm}{s}$$

$$t_f = \frac{3}{2} \frac{1dm}{10 \frac{dm}{s}} = \frac{3}{20}s = 0.015s$$

Velocidad Angular

Perfil de velocidad lineal $v_1(t)$:



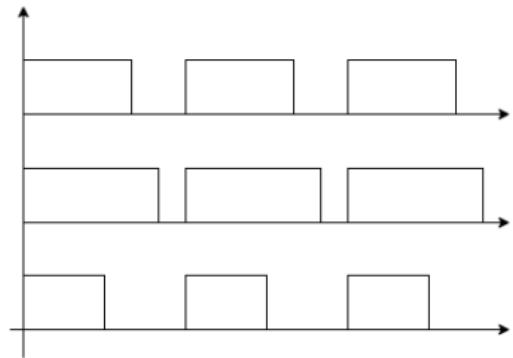
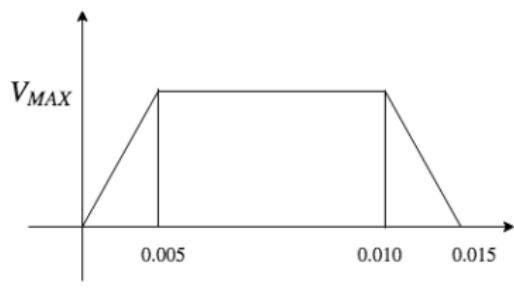
Con la velocidad lineal $v_1(t)$ se encuentran el perfil de las velocidades de las llantas izquierda y derecha:

$$\omega_L(t) = \frac{v_1(t)}{2\pi r}; \omega_R(t) = \frac{v_1(t)}{2\pi r}$$

Velocidad Angular

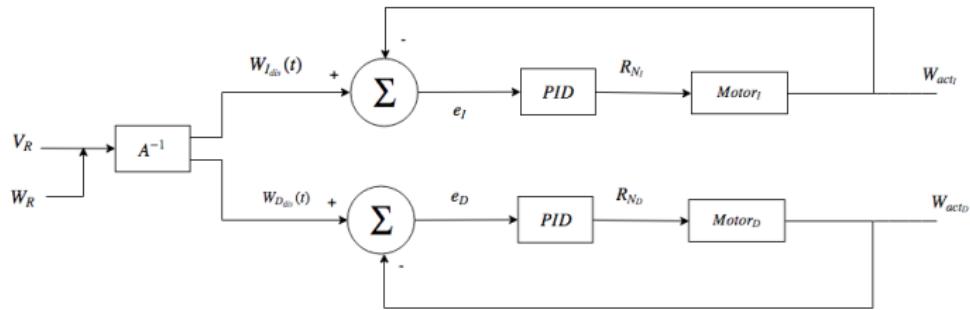
$$\omega_L(t) = \omega_R(t)$$

Perfil de velocidad de la llanta izquierda $\omega_L(t)$ y su transformación usando PWM:



Controlando la Velocidad Lineal y Angular del Robot

La velocidad lineal V_R y angular W_R del robot se transforma utilizando la matriz inversa de A obteniéndose las velocidades angulares deseadas de los motores: W_I , W_D .



En este esquema se controlan las velocidades angulares de los motores.

Controlando la Velocidad Lineal y Angular del Robot

Para el motor izquierdo se tiene el siguiente control:

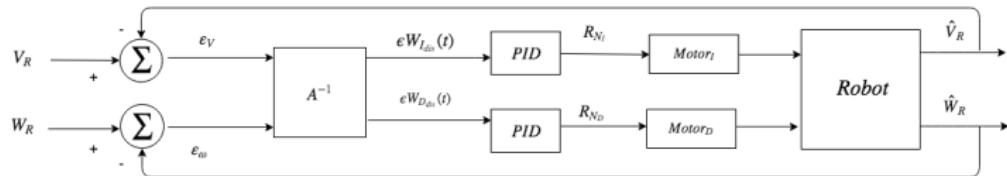
$$R_{ni} = R_{ni-1} + K_P(e_{wni} - e_{wni-1}) + K_I \cdot (e_{wni} + e_{wni-1}) + \\ K_D \cdot (e_{wni} - 2e_{wni-1} + e_{wni-2})$$

Para el motor derecho se tiene el siguiente control:

$$R_{nD} = R_{nD-1} + K_P(e_{wnD} - e_{wnD-1}) + K_I \cdot (e_{wnD} + e_{wnD-1}) + \\ K_D \cdot (e_{wnD} - 2e_{wnD} + e_{wnD-2})$$

Controlando la Velocidad Lineal y Angular del Robot

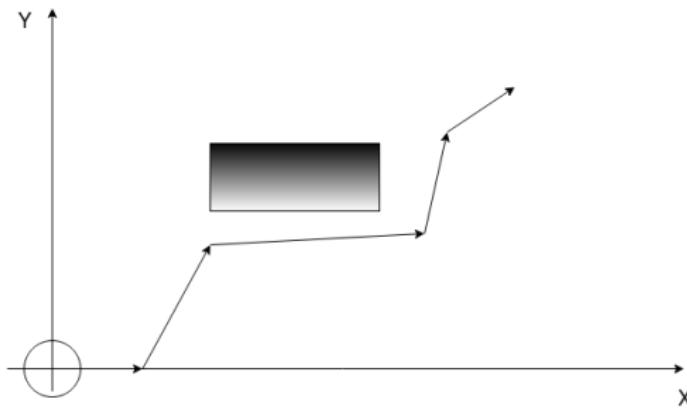
En este esquema se controlan las velocidades lineal y angular del robot.



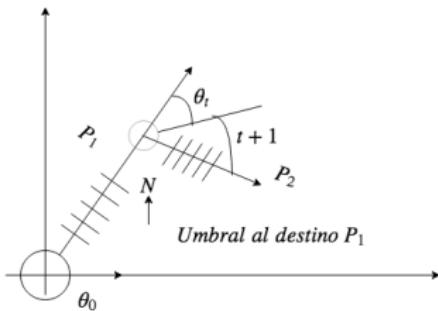
Este esquema necesita que se calculen un estimado de las velocidades del robot \hat{V}_R y \hat{W}_R . Esto se puede hacer usando encoders, acelerómetros y giroscopios colocados en el robot, o por medio de dispositivos externos, como cámaras, que proporcionen estas velocidades.

Planeación de Movimientos del Robot

Dentro de la planeación de movimientos se requiere que el robot visite diferentes puntos en el espacio libre de navegación. Una vez encontrados estos puntos el robot los puede alcanzar girando primero un angulo θ_i y después avanzando una distancia d_i .



Planeación de Movimientos del Robot



Se empieza con una posición del $P_0 = \{X_0, Y_0, \theta_0\}$, se trata de llegar a $P_1 = \{X_1, Y_1\}$, entre estos dos puntos el camino se divide en N segmentos: $p_1 = (x_0, y_0), p_2 = (x_1, y_1), \dots, p_g = (x_g, y_g), \dots, p_N = (x_N, y_N)$.

Leyes de Control

Dados los puntos

$$p_1 = (x_0, y_0), p_2 = (x_1, y_1), \dots, p_g = (x_g, y_g), \dots, p_N = (x_N, y_N)$$

se deben encontrar las velocidades de las llantas ω_l y ω_r , de modo que se garantice que el robot llegue a estas posiciones, aun en presencia de incertidumbres (como las dinámicas no modeladas) y perturbaciones.

Para alcanzar la posición $p_g = (x_g, y_g)$, dado que el robot se encuentra en $p_r = (x_r, y_r)$, el ángulo deseado para llegar a esta p_g es θ_g .

Que corresponde al ángulo del vector de error de posición:

$$\theta_g = \text{atan}(y_g - y_r, x_g - x_r)$$

de donde se define el error de ángulo:

$$e_\theta = \theta_g - \theta_r = \text{atan}(y_g - y_r, x_g - x_r) - \theta_r$$

Leyes de Control

El error de distancia r es simplemente la magnitud del vector de error de posición:

$$r = \left[(x_g - x_r)^2 + (y_g - y_r)^2 \right]^{1/2}$$

En la primera ley de control las velocidades se calculan tomando en cuenta tanto el error de posición como el de ángulo:

$$\omega_L = k_\theta e_\theta + k_d r e^{-\psi e_\theta^2}$$

$$\omega_R = -k_\theta e_\theta + k_d r e^{-\psi e_\theta^2}$$

Nótese que los primeros términos tienen igual magnitud pero signo opuesto, lo que provoca una velocidad angular que es proporcional al error de ángulo. Los segundos términos, al tener el mismo signo y misma magnitud, provocan una velocidad lineal que es proporcional al error de distancia, es decir, el robot se irá deteniendo conforme se acerque al punto meta.

Leyes de Control

La exponencial sirve para hacer pequeña la velocidad lineal cuando el error de ángulo es grande, es decir, este término logra que el robot comience a avanzar hasta que esté apuntando en la dirección correcta.

En esta ley de control se tienen tres parámetros de diseño: $k_\theta > 0$, $k_d > 0$ y $\psi > 0$. Las dos primeras determinan la rapidez con que el robot girará y avanzará hacia el punto meta. La tercera es muy importante. Un valor de ψ muy grande hará que la velocidad lineal decrezca muy rápido cuando crece el error de ángulo, es decir, el robot comenzará a avanzar hasta que esté apuntando casi sin error hacia la meta. Por el contrario, una ψ muy pequeña hará que el robot describa curvas muy grandes.

Leyes de Control

Si el robot tiene un movimiento lineal y rotacional al mismo tiempo se tiene las siguientes ecuaciones de control para la llanta izquierda ω_L y ω_R :

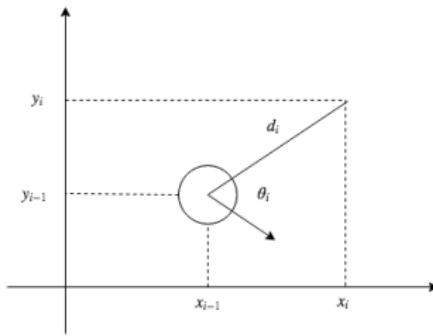
$$\omega_L = V_{max} e^{-\frac{e_\theta^2}{2 \cdot \alpha^2}} + \frac{D}{2} W_{max} \left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{e_\theta}{\beta}}} - 1 \right)$$

$$\omega_R = V_{max} e^{-\frac{e_\theta^2}{2 \cdot \alpha^2}} - \frac{D}{2} W_{max} \left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{e_\theta}{\beta}}} - 1 \right)$$

Donde D es la distancia en el eje entre las dos ruedas del robot. En estas ecuaciones se tienen cuatro parámetros de diseño: V_{max} y W_{max} son las velocidades lineales y angulares máximas respectivamente que el robot alcanzará durante su movimiento. La constante α tiene una función parecida a la ψ en las ecuaciones anteriores, solo que en este caso, al estar dividiendo, una α más pequeña provocará un descenso más pronunciado en la magnitud de la velocidad lineal. El valor de β determina qué tanto decrece la velocidad angular conforme decrece el error de ángulo.

Algoritmo de Movimiento

Si el robot se encuentra en la posición (x_{i-1}, y_{i-1}) y se desea llegar a la posición (x_i, y_i) el robot primero gira un ángulo θ_i y después avanza una distancia d_i .



Algoritmo de Movimiento

INPUT:

θ_i : angulo de giro

d_i : distancia de avance

OUTPUT

Velocidades angulares del motor izquierdo ω_L y del motor derecho ω_R .

Angulo girado α_t y distancia avanzada δ_t del robot.

$t = 0$

$\delta_t = 0$

$\alpha_t = 0$

WHILE $\{\delta_t < d_i\}$

1. Se encuentra el error del angulo: $e_\theta = \theta_i - \alpha_t$

2. $t = t + 1$

3. Se encuentran las velocidades angulares de los motores ω_L y ω_R :

$$\omega_L = V_{max} e^{-\frac{e_\theta^2}{2 \cdot \alpha^2}} + \frac{D}{2} W_{max} \left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{e_\theta}{\beta}}} - 1 \right)$$

$$\omega_R = V_{max} e^{-\frac{e_\theta^2}{2 \cdot \alpha^2}} - \frac{D}{2} W_{max} \left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{e_\theta}{\beta}}} - 1 \right)$$

4. Durante un tiempo T_t el robot ejecuta las velocidades ω_L y ω_R utilizando un controlador PID para cada llanta.

Algoritmo de Movimiento

5. Se calculan las velocidades lineales V_t y angulares W_t del robot.

$$\begin{bmatrix} V_t \\ W_t \end{bmatrix} = 2\pi r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix}$$

6. Se calcula lo que ha girado α_t el robot.

$$\alpha_t = \int_0^{T_t} W_t dt = t_\delta \cdot \sum_{i=1}^t \frac{W_i + W_{i-1}}{2}$$

$$\alpha_{t-1} = \int_0^{T_{t-1}} W_t dt = t_\delta \cdot \sum_{i=1}^{t-1} \frac{W_i + W_{i-1}}{2}$$

En forma recursiva:

$$\alpha_t - \alpha_{t-1} = \int_0^{T_t} W_t dt = t_\delta \cdot \sum_{i=1}^t \frac{W_i + W_{i-1}}{2} - t_\delta \cdot \sum_{i=1}^{t-1} \frac{W_i + W_{i-1}}{2}$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + t_\delta \cdot \frac{W_t + W_{t-1}}{2}$$

Algoritmo de Movimiento

7. Se calcula lo que ha avanzado δ_t el robot.

$$\delta_t = \int_0^{T_t} v_t dt = t_\delta \cdot \sum_{i=1}^t \frac{v_i + v_{i-1}}{2}$$

$$\delta_{t-1} = \int_0^{T_{t-1}} v_t dt = t_\delta \cdot \sum_{i=1}^{t-1} \frac{v_i + v_{i-1}}{2}$$

En forma recursiva:

$$\delta_t - \delta_{t-1} = \int_0^{T_t} v_t dt = t_\delta \cdot \sum_{i=1}^t \frac{v_i + v_{i-1}}{2} - t_\delta \cdot \sum_{i=1}^{t-1} \frac{v_i + v_{i-1}}{2}$$

$$\delta_t = \delta_{t-1} + t_\delta \cdot \frac{v_t + v_{t-1}}{2}$$

ENDWHILE