Repaso 1: Procesamiento de Señales

Jesús Savage

2 de febrero de 2022

Índice

Repaso Transformada de Laplace

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

Ejemplos:

$$L\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}\, dt = -\left.\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\right|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}$$

Función escalón

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Repaso Transformada de Laplace

Ejemplos:

$$L\left\{\cos(\omega\, t)\right\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$L\left\{tu(t)\right\} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\left\{\int_0^\infty f(t)\, dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Solución de Ecuaciones Diferenciales Usando la Transformada de Laplace

$$f(t) = L^{-1}\left\{F(s)\right\} = \int_0^{\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^n\, y(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}\, y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + b_1\frac{dy(t)}{dt} + b_0\, y(t)$$

$$= a_m\frac{d^m\, x(t)}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}\, x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0\, x(t)$$

Usando la transformada de *Laplace* para resolver la ecuación diferencial (condiciones iniciales nulas).

Solución de Ecuaciones Diferenciales Usando la Transformada de Laplace

$$s^n Y(s) + b_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \ldots + b_1 sY(s) + b_0 Y(s) =$$
$$a_m s^m X(s) + a_{m-1}s^{m-1}X(s) + \ldots + a_1 sX(s) + a_0 X(s)$$

$$\Rightarrow (s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)Y(s) = (a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)X(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Transformada Inversa

Para encontrar la transformada inversa se puede resolver por fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{s(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$
$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-s_n}$$

Cuya antitransformada de Laplace es:

$$\Rightarrow f(t) = A_0 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \ldots + A_n e^{s_n t}$$

Transformada Inversa

Entonces para encontrar la constante A_k se procede de la siguiente forma:

$$(s-s_k)F(s) = \frac{(s-s_k)P(s)}{Q(s)}$$

$$= \frac{(s-s_k)}{s}A_0 + \frac{(s-s_k)}{s-s_1}A_1 + \ldots + \frac{(s-s_k)}{s-s_k}A_k + \ldots + \frac{(s-s_k)}{s-s_n}A_n$$

$$= \frac{(s-s_k)}{s}A_0 + \frac{(s-s_k)}{s-s_1}A_1 + \ldots + A_k + \ldots + \frac{(s-s_k)}{s-s_n}A_n$$

Si $s = s_k$

$$A_k = \left[(s-s_k)\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_k}$$

Ejemplo

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} =$$

$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}$$

$$A_0 = \left[\frac{s(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right]_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \left[\frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right]_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left[\frac{(s+3)(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right]_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

Ejemplo

$$F(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{6}}{s+3}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

Polos Reales Múltiples

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-s_1)^3(s-s_2)}$$

$$= \frac{A_{13}}{(s-s_1)^3} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + \frac{A_{11}}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$$

Transformada inversa

$$f(t) = A_{13}\frac{t^2}{2}e^{s_1 t} + A_{12}\, t\, e^{s_1 t} + A_{11}\, e^{s_1 t} + A_2\, e^{s_2 t}$$

Ejemplo

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)} = \frac{A_{13}}{(s+2)^3} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_2}{s+3}$$

$$A_{13} = \left[(s+2)^3 F(s)\right]_{s=-2}$$

Polos Reales Múltiples

$$= \left[A_{13} + A_{12}(s+2) + A_{11}(s+2)^2 + \frac{A_2(s+2)^3}{s+3} \right]_{s=-2}$$

Dando como resultado $A_{13} = 1$
Para el termino A_{12}:

$$A_{12} = \left[(s+2)^2 F(s) \right]_{s=-2} = \left[\frac{A_{13}}{s+2} + A_{12} + A_{11}(s+2) + \frac{A_2(s+2)^2}{s+3} \right]_{s=-2}$$

Existe una indeterminación en el primer término. Sin embargo, se puede quitar esta indeterminación de la siguiente forma:

$$A_{12} = \left[\frac{d}{ds} \left((s+2)^3 F(s) \right) \right]_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+3} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left(A_{13} + A_{12}(s+2) + A_{11}(s+2)^2 + \frac{A_2(s+2)^3}{s+3} \right) \Bigg|_{s=-2}$$

Polos Reales Múltiples

$$\Rightarrow A_{12} = \left.\frac{-1}{(s+3)^2}\right]_{s=-2} = -1$$

Luego, para A_{11}

$$A_{11} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+2)^3 F(s)\right]_{s=-2} = \left.\frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^3}\right|_{s=-2} = 1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+2)^3} - \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$\therefore\ f(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-2t} - te^{-2t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

En general para r raices repetidas:

$$\therefore\ A_{q(r-k)} = \left\{\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-s_q)^r \frac{P(s)}{Q(s)}\right]\right\}_{s=s_q}$$

Polos Complejos Conjugados

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)}$$

Recordando que las raices de $As^2 + Bs + C = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$,

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$= \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{-1(1 - \zeta^2)}}{2}$$

$$= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Polos Complejos Conjugados

Entonces con estas raices:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)}$$

$$= \frac{A_1}{s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_2}{s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_3}{s + s_3}$$

La transformada inversa de $F(s)$ es

$$f(t) = A_1 e^{-\left(\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t} + A_3 e^{s_3 t}$$

Polos Complejos Conjugados

Para encontrar A_1:

$$A_1 = \left[(s - s_1) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_1}$$

$$= \left[(s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Para A_2 se procede de la misma manera:

$$A_2 = \left[(s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Polos Complejos Conjugados

Tanto A_1 y A_2 son números complejos conjugados, pero dado que la respuesta es real se necesita encontrar un respuesta que no contenga números complejos:

$$f(t) = A_1 e^{-\zeta\omega_n t} e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} + A_2 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} + A_3 e^{s_3 t}$$

Utilizando la formula de Euler:

$$e^{jx} = cosx + jsenx$$

de donde se puede obtener:

$$senx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Polos Complejos Conjugados

Eliminando los coeficientes complejos usando la definición anterior del seno.

$$f(t) = 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2 t} + \phi\right) + A_3 e^{s_3 t}$$

$$\phi = \text{Ángulo de } A_1 + 90^\circ$$

$$A_1 = [(s - s_1)F(s)]_{s=s_1} = a_{1Re} + a_{1Im}$$

$$|A_1| = \sqrt{a_{1Re}^2 + a_{1Im}^2}$$

$$Angulo(A_1) = \tan^{-1}\left(\frac{a_{1Im}}{a_{1Re}}\right)$$

Ejemplo

$$F(s) = \frac{10}{(s^2+6s+25)(s+2)} = \frac{A_1}{s+3-j4} + \frac{A_2}{s+3+j4} + \frac{A_3}{s+2}$$

$$A_1 = \left[(s+3-j4)F(s)\right]\Big|_{s=-3+j4}$$

$$= \left.\frac{10}{(s+3+j4)(s+2)}\right|_{s=-3+j4}$$

$$= \frac{10}{(j8)(-1+j4)} = \frac{10}{-32-j8}$$

Ejemplo

Multiplicando por el conjugado

$$\frac{10(-32+j8)}{(-32-j8)(-32+j8)} = \frac{-10}{8(17)}(4-j)$$

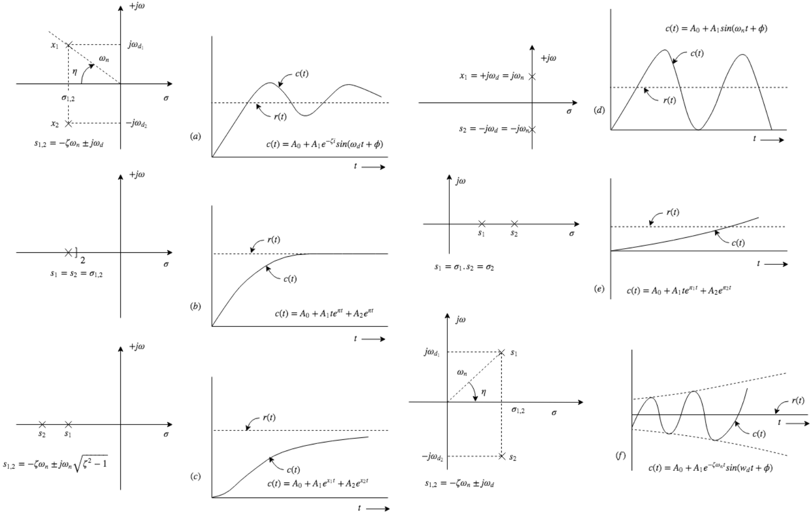
$$|A_1| = \frac{10}{8(17)}\sqrt{16+1} = 0.303$$

$$deg(A_1) = -194^{\circ} \Rightarrow \phi = -104^{\circ}$$

$$A_3 = [(s+2)F(s)]_{s=-2} = 0.59$$

$$\Rightarrow f(t) = 0.606e^{-3t}\,\mathrm{sen}(4t - 104^{\circ}) + 0.59e^{-2t}$$

Relación entre la posición de polos y la respuesta en el tiempo



Ejemplo de solución de ecuación diferencial usando transformada de Laplace

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$y(t) + \frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

$$\mathcal{L}\{y(t) + \frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt}\} = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$Y(s)(1 + \frac{1}{2}s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{(1 + \frac{1}{2}s)}$$

$$Con\ x(t) = 1, \qquad para\ t \geq 0$$

$$X(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = (-\frac{1}{s}e^{-st})|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Transformada de Laplace

Usando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2}s)} = \frac{1}{s(1+\frac{1}{2}s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}s} =$$

Con

$$A = (\frac{1}{1+\frac{1}{2}s})|_{s=0} = 1$$

$$B = (\frac{1}{s})|_{s=-2} = \frac{-1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}(2)}{(1-\frac{1}{2}s)(2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

Transformada de Laplace

Recordar que :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt$$

$$= (\frac{-1}{(a+s)} e^{-(a+s)t})|_0^{\infty} = \frac{1}{a+s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2+s} \longleftrightarrow y(t) = 1 - e^{-2t}$$

Transformada de Laplace

Con:

$$y(t) = 1 - e^{-2t}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2e^{-2t}$$

$$x(t) = 1, \quad t \geq 0$$

Se comprueba que la ecuación diferencial:

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{2}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$= x(t) - \frac{1}{2}(2e^{-2t})$$

$$= 1 - e^{-2t}$$

Transformada Z

Sea $x[n]$ una serie en el tiempo, su transformada Z esta dada por:

$$Z\{x[n]\} = X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

z es un número complejo limitado a un número de que haga que la serie converja.

Transformada Z Unilateral

$$Para \quad x[n] = a^n; \quad n \geq 0$$

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (1); \; Multiplicando \; (1) \; por \; az^{-1}$$

$$az^{-1}x(z) = az^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^{n+1} =$$

$$m = n + 1; \quad n = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \infty \Rightarrow m = \infty$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (az^{-1})^m = \sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (2)$$

Transformada Z Unilateral

$$(1) - (2) \Rightarrow X(z) - az^{-1}X(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n - \sum_{n=1}^{\infty}(az^{-1})^n = 1$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Transformada Z Unilateral

Ejemplo:

$$x[n] = 2^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \leftrightarrow 2^n$$

$$Si\ x[n] = 1^n = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Transformada Z Unilateral

$$y[n] = x[n-1]$$

$$Z\{y[n]\} = Y[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n}$$

$$= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n}$$

$$m = n-1; \qquad n = 1 \Rightarrow m = 0$$

$$n = m+1; \qquad n = \infty \Rightarrow m = \infty$$

$$= x[-1] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)} = x[-1] + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}$$

Transformada Z Unilateral

Entonces:

$$Z\{x[n-1]\} = z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$\begin{aligned} \textit{Para} \quad y[n] &= x[n-2] \\ Y[z] &= x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}X(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Para} \quad y[n] &= x[n-m] \quad \textit{con } m > 0 \\ Y(z) &= x[-m] + x[-m+1]z^{-1} + \cdots + x[-1]z^{-m+1} + z^{-m}X(z) \\ &= \sum_{k=1}^{m} x[k-1-m]z^{-k+1} + z^{-m}X(z) \end{aligned}$$

Transformada Z

Solución de ecuaciones en diferencia utilizando la transformada Z

$$a_k y_{n-k} + a_{k-1} y_{n-(k-1)} + ... + a_0 y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + ... + b_j x_{n-j}$$

$$Y(z)(a_k z^{-k} + a_{k-1} z^{-(k-1)} + ... + a_0) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_j z^{-j})$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_j z^{-j}}{a_k z^{-k} + a_{k-1} z^{-(k-1)} + ... + a_0}$$

Ejemplo

Se tiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] \qquad (1)\\
x[n] &= 1, \quad n \geq 0\\
n &= -1, \quad y[-1] = 1\\
\textit{Para } n &= 0\\
y[0] &= x[0] + \frac{1}{2} y[-1]\\
&= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\\
y[1] &= x[1] + \frac{1}{2} y[0]\\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$$

$$y[3] = x[3] + \frac{1}{2}y[2] = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{16}{16} + \frac{15}{16} = \frac{31}{16}$$

Ejemplo

Solucionando la ecuación en diferencias con la transformada Z para encontrar una solución analítica.

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$Z\{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]\} = Z\{x(n)\}$$

$$Z\{y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]\} = Y(z) - \frac{1}{2}\{y[-1] + z^{-1}Y(z)\}$$

$$x[n] = 1, \quad n \geq 0 \quad \Rightarrow Z\{x[n]\} = X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Ejemplo

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Usando fracciones parciales para el segundo termino:

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

Encontrando los valores de A y B:

$$A = (\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})})|_{z^{-1}=2} = (\frac{1}{1 - z^{-1}})|_{z^{-1}=2} = -1$$

$$B = (\frac{1 - z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})})|_{z^{-1}=1} = (\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}})|_{z^{-1}=1} = 2$$

Ejemplo

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

entonces

$$Z\{Y(z)\}^{-1} = y[n] = 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n}$$

Ejemplo

$$y[n] = 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$$

Comparando esta función analítica con los resultados anteriores:

$$y[0] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$y[1] = 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$
$$y[2] = 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = 2 - \frac{1}{8} = \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$
$$y[3] = 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3 = \frac{32}{16} - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

Función Analítica

Para la ecuación en diferencias:

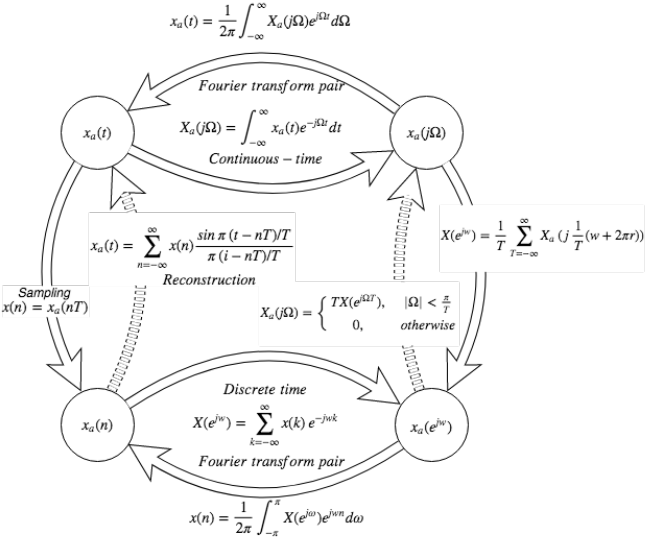
$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

La solución analítica es:

$$y[n] = 2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$$

La diferencia fundamental con la solución analítica es que se puede encontrar para cualquier N el valor de $y[n]$ en forma instantanea, de la otra forma se tendría que evaluar la ecuación en diferencias con $n = 0, n = 1, \ldots, n = N$.

Relación entre las Transformadas de Laplace y Z



Relación entre las Transformadas de Laplace y Z

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

En donde s es un número complejo.
Si $s = j\omega$ la transformada de Laplace se convierte en la transformada de Fourier:

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

La tranformada discreta de Fourier es:

$$F\{x[n]\} = X[e^{-j\omega}] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Relación entre las Transformadas de Laplace y Z

$$F\{x[n]\} = X[e^{-j\omega}] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Si $e^{-j\omega} = z$ entonces esta transformada se convierte en la transformada Z.

$$Z\{x[n]\} = X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Con $s = j\omega$, z se convierte en $z = e^{sT}$
Donde T es el periodo del muestreo.

Transformada Bilineal

Si se cuenta con una función de transferencia en el dominio de Laplace

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Se requiere una función que transforme de *Laplace* a Z $(s \rightarrow z)$ conservando los polos estables.
Con $z = e^{sT} \Rightarrow s = \frac{1}{T}\, ln(z)$

Transformada Bilineal

Aproximando el logaritmo por una serie de Taylor

$$\frac{1}{T}\, ln(z) = \frac{2}{T}\, \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \dots \right]$$

$$\approx \frac{2}{T}\, \left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2}{T}\, \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$H_d(z) = [\, H(s)\,]_{s=\frac{2}{T}\,\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = H\left(\frac{2}{T}\,\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)$$

Transformada Bilineal

Bibliografía
John J. D'Azzo Linear Control System Analysis & Design, McGraw-Hill Inc, 1988