Lección 10: Mínimos Cuadrados

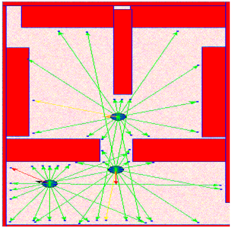
Jesús Savage
Facultad de Ingeniería, UNAM
Trabajo realizado con el apoyo del Programa
UNAM-DGAPA-PAPIME PE100821

19 de junio de 2023

Mínimos Cuadrados

El robot cuenta con sensores de proximidad que le permiten calcular la distancia a la cual se encuentran los objetos. A las lecturas que hacen los sensores se les agregan señales de ruido v no deseadas a los valores reales r y se desea en lo posible eliminar este ruido:

$$x = r + v$$



Mínimos Cuadrados

Se colocan objetos enfrente de robot a una distancia conocida y se hacen lecturas de los sensores, obteniendose un grupo de datos

$$(x_1,\ f(x_1)),\ (x_2,\ f(x_2)),\ \dots,(x_n,\ f(x_n))$$

como el mostrado en la siguiente tabla:

Valor Leído	*Valor Real*	*Valor Estimado*
x_i	$f(x_i)$	$y_M(x_i)$
x_1	$f(x_1)$	$y_M(x_1)$
x_2	(x_2)	$y_M(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i)$	$y_M(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$y_M(x_M)$

El objetivo es encontrar una función $y_m(x)$ que estime los valores reales a partir de las lecturas de los sensores.

Mínimos Cuadrados

Dada la lectura x de un sensor, si la función de estimación es de la siguiente forma:

$$y_m(x) = a_1 + a_2\ x + a_3\ x^2 + \ldots + a_{m+1}\ x^m$$

El objetivo es encontrar los valores de las constantes $a_1,\ a_2, \ldots, a_{m+1}$ tal que el error cuadrático sea mínimo.

$$\begin{aligned} E = \sum_{i=1}^{n}\ e_i^2\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_m(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_1 - a_2\ x_i - a_3\ x_i^2 - \ldots - a_{m+1}\ x_i^{m+1})^2 \end{aligned}$$

Por ejemplo, para $y_1\ (x) = a_1 + a_2\ x$ el error cuadrático se minimiza derivando la función del error con respecto a a_1 y a_2.

Mínimos Cuadrados

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial \ a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_1 - a_2 x_i) = 0$$

$$a_1 \cdot n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\partial \ a_2} = 2 \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_1 - a_2 x_i)(-x_i) = 0$$

$$a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) \qquad (2)$$

Mínimos Cuadrados

De (1)

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_1) - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (3)$$

(3) en (2)

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_1) - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \; f(x_i)$$

Mínimos Cuadrados

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\ x_i - \frac{1}{n}a_2\sum_{i=1}^{n}\ x_i\ \sum_{i=1}^{n}\ x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\ f(x_i)$$

$$a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\ x_i\ f(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ f(x_i)\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$a_2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ x_i\ f(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ f(x_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\ x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Mínimos Cuadrados

$$a_1 \cdot n + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\ f(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\ f(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\right)$$

Mínimos Cuadrados

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, f(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}{n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

Mínimos Cuadrados

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \; f(x_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Algoritmo

ALGORITMO para determinar el ajuste de mínimos cuadrados para un conjunto dado de datos, $(x_1, f(x_1), (x_2, (fx_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.
1.- Ajustar un polinomio de primer grado

$$y_1(x) = a_1 + a_2\, x$$

resolviendo las ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \end{bmatrix}$$

2.- Calcular $E_1 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_1^* - a_2^*\, x_i)^2/(n-2)$
3.- Ajustar un polinomio de segundo grado

$$y_2(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$$

Algoritmo

Resolviendo las ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i{}^2 \\ \sum x_i & \sum x_i{}^2 & \sum x_i{}^3 \\ \sum x_i{}^2 & \sum x_i{}^3 & \sum x_i{}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \sum x_i{}^2 f(x_i) \end{bmatrix}$$

4.- Calcular $E_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - b_1^* - b_2^* x_i{}^2) \right)^2 \right] / (n-3)$

5.- Si $E_2 > E_1$ concluye que $y_1^*(x) = a_1^* + a_2^*\, x$ representa adecuadamente los datos dados, de lo contrario, vaya al paso 6.

6.- Conjunto k=3.

7.- Ajustar el polinomio de grado k

$$y_k(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j\, x^{j-1}$$

Algoritmo

y resolviendo las ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i{}^2 & \dots & \sum x_i{}^k \\ \sum x_i & \sum x_i{}^2 & \sum x_i{}^3 & \dots & \sum x_i{}^{k+1} \\ \sum x_i{}^2 & \sum x_i{}^3 & \sum x_i{}^4 & \dots & \sum x_i{}^{k+2} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \sum x_i{}^k & \sum x_i{}^{k+1} & \sum x_i{}^{k+2} & \dots & \sum x_i{}^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \sum x_i{}^2 f(x_i) \\ . \\ . \\ . \\ \sum x_i{}^k f(x_i) \end{bmatrix}$$

8.- Calcular $E_k = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^* \; x_i{}^{j-1} \right)^2 \; / \; (n-k-1)$

9.- Si $|E_k - E_{k-1}| < \epsilon$ concluye que $y_{k-1}^*(x)$ representa los datos, de lo contrario vaya al paso 10.

10.- Aumente k en 1 y vaya al paso 7.

Regresión No Lineal

$$y = a_0\ x^{a_1}$$
$$y = a_0 + x + ln(1 + a_1 x)$$
$$y = a_0\ x\ sen(a, x)$$

$$z_i = ln\ y_1 = a_0 + a_1\ ln\ x_i$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - a_0 - a_1\ ln\ x_i)^2$$
$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum (f(x_i) - a_0 - a_1\ ln\ x_i) = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum (f(x_i) - a_0 - a_1\ ln\ x_i) ln\ x_i = 0$$

$$\sum f(x_i) - n.\ a_0 - a_1 \sum ln\ x_i = 0$$

Regresión No Lineal

$$a_o = \frac{a_1 \sum ln\ x_i - \sum f(x_i)}{N}$$

$$\sum f(x_i)\ ln\ x_i - a_0 \sum ln\ x_i - a_i \sum (ln\ x_i)^2 = 0$$

$$\sum\ ln\ x_i(f(x_i) - a_0) - a_i \sum (ln\ x_i)^2 = 0$$

$$a_1 = \frac{\sum\ ln\ x_i(f(x_i) - a_0)}{\sum (ln\ x_i)^2}$$