

Lección 8: Navegando a lo largo de una secuencia de líneas rectas

Jesús Savage
Facultad de Ingeniería, UNAM
Trabajo realizado con el apoyo del Programa
UNAM-DGAPA-PAPIME PE100821
Derechos reservados, 2023

19 de junio de 2023

Índice

- 1 Introducción
- 2 Robot Omnidireccional
- 3 Robot Bidireccional
- 4 Ejemplos

Introducción

$$x_i = \overline{OA} = x_{i-1} + r \cos(\theta_{i-1} + \theta'_i)$$

$$y_i = \overline{AP} = y_{i-1} + r \operatorname{sen}(\theta_{i-1} + \theta'_i)$$

$$x_i = x_{i-1} + r \cos(\theta'_i) \cos(\theta_{i-1}) - r \operatorname{sen}(\theta'_i) \operatorname{sen}(\theta_{i-1})$$

$$y_i = y_{i-1} + r \cos(\theta'_i) \operatorname{sen}(\theta_{i-1}) + r \operatorname{sen}(\theta'_i) \cos(\theta_{i-1})$$

$$x'_i = \overline{O'A'} = r \cos(\theta'_i)$$

$$y'_i = \overline{O'P'} = r \operatorname{sen}(\theta'_i)$$

$$x_i = x_{i-1} + x'_i \cos(\theta_{i-1}) - y'_i \operatorname{sen}(\theta_{i-1})$$

$$y_i = y_{i-1} + x'_i \operatorname{sen}(\theta_{i-1}) + y'_i \cos(\theta_{i-1})$$

Esto para un sistema omnidireccional.

Robot Omnidireccional

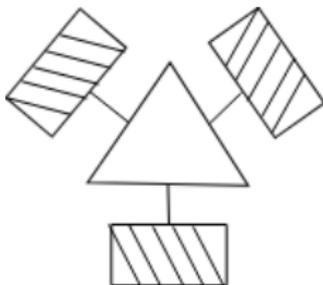
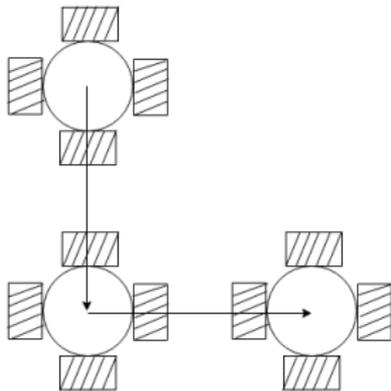
En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i-1}) & -\text{sen}(\theta_{i-1}) & 0 \\ \text{sen}(\theta_{i-1}) & \cos(\theta_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

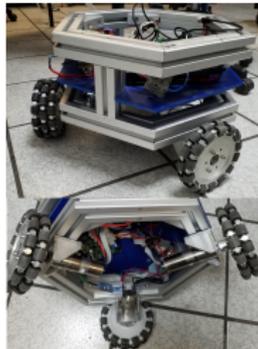
Despejando x'_i, y'_i y θ'_i para un robot omnidireccional:

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i-1}) & \text{sen}(\theta_{i-1}) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{i-1}) & \cos(\theta_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ \theta_i - \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

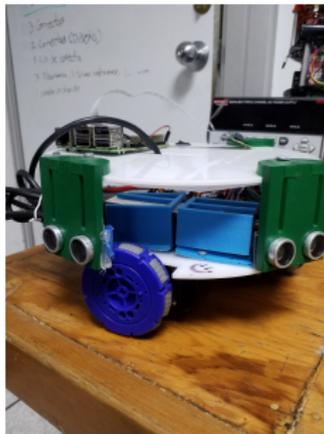
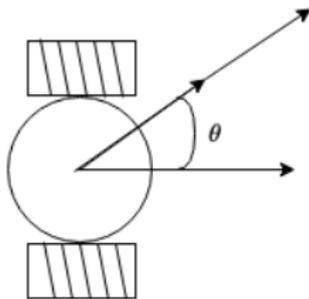
Robots Omnidireccionales



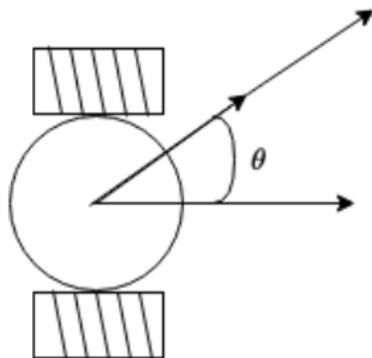
Robots Omnidireccionales



Robot Bidireccional



Robot Bidireccional

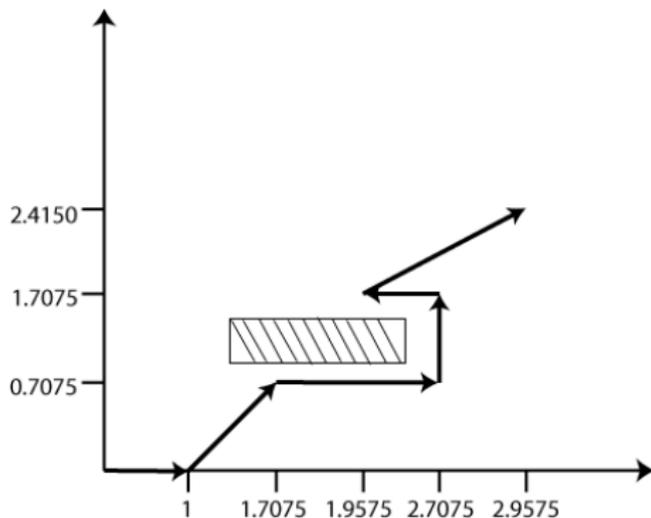


En el caso de un sistema robot bidireccional, las ecuaciones son las mismas, pero el robot primero gira un ángulo θ_i y después avanza, entonces se usa este ángulo en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ \theta_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \text{sen}(\theta_i) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ \theta_i - \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Se desea que el robot recorra el siguiente camino:



Caso 1. Robot bidireccional

El robot primero gira y luego avanza. El ángulo θ_i se calcula de la siguiente forma:

$$\theta_i = \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)$$

Tiempo $i = 1$

Pose inicial del robot:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0$$

Siguiente pose:

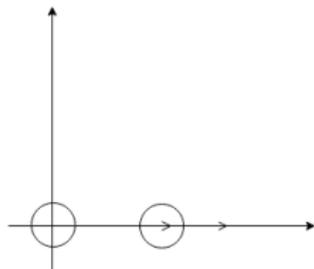
$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

$$\theta'_1 = 0$$

$$x'_1 = 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot \sin(0) = 1$$

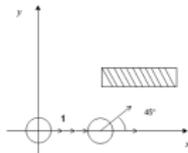
$$y'_1 = -1 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$$

Ángulos positivos son giros a la izquierda, ángulos negativos son a la derecha.



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 2$



Pose del robot

$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

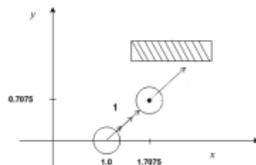
Siguiente pose:

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

$$\theta_2' = 45^\circ$$

$$x_2' = 0.7075 \cdot \cos(45^\circ) + 0.7075 \cdot \sin(45^\circ) = 1$$

$$y_2' = -0.7075 \cdot \sin(45^\circ) + 0.7075 \cdot \cos(45^\circ) = 0$$



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 3$

Pose del robot

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

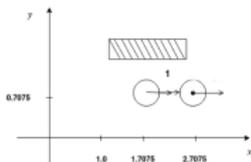
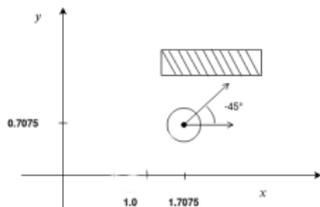
Siguiente pose:

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0$$

$$\theta'_3 = -45^\circ$$

$$x'_3 = 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot \text{sen}(0) = 1$$

$$y'_3 = -1 \cdot \text{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$$



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 4$

Pose del robot

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0$$

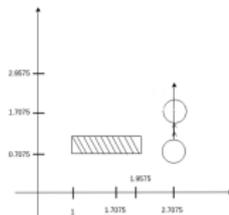
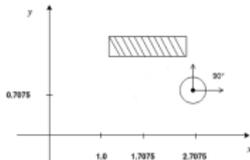
Siguiente pose:

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

$$\theta'_4 = 90^\circ$$

$$x'_4 = 0 \cdot \cos(90^\circ) + 1 \cdot \sin(90^\circ) = 1$$

$$y'_4 = -0 \cdot \sin(0) + 1 \cdot \cos(90^\circ) = 0$$



Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 5$

Pose del robot

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

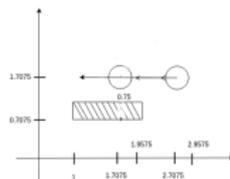
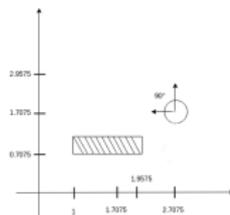
Siguiente pose:

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$

$$\theta'_5 = 90^\circ$$

$$x'_5 = -0.7075 \cdot \cos(180^\circ) + 0 \cdot \sin(180^\circ) = 0.7075$$

$$y'_5 = -0.7075 \cdot \sin(180^\circ) + 0 \cdot \cos(180^\circ) = 0$$

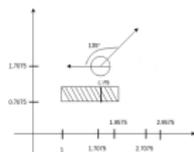


Caso 1. Robot bidireccional

Tiempo $i = 6$

Pose del robot

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$



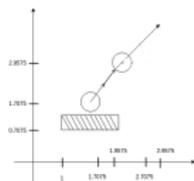
Siguiente pose:

$$x_6 = 2.9575, y_6 = 2.4150, \theta_6 = 45^\circ$$

$$\theta'_6 = -135^\circ$$

$$x'_6 = 1 \cdot \cos(45^\circ) + 0.7075 \cdot \sin(45^\circ) = 0.7075$$

$$y'_6 = -1.7075 \cdot \sin(45^\circ) + 0.7075 \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

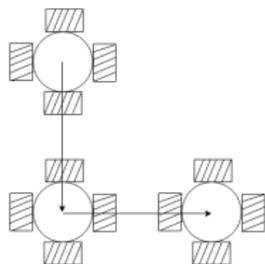


Caso 2. Robot Omnidireccional

Recordar que para un robot omnidireccional se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ \theta_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i-1}) & \text{sen}(\theta_{i-1}) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{i-1}) & \cos(\theta_{i-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ y_i - y_{i-1} \\ \theta_i - \theta_{i-1} \end{bmatrix}$$

En este tipo de robots para avanzar por el eje x_i' se utiliza un par de ruedas, por ejemplo las que están paralelas al eje X , para avanzar por el otro eje y_i' se usa el otro par.



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 1$

Pose del robot

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0$$

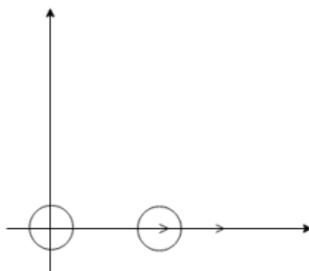
Siguiente pose:

$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

$$x_1' = 1 \cdot \cos(0) + 0 \cdot \sin(0) = 1$$

$$y_1' = -1 \cdot \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0$$

$$\theta_1' = 0$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 2$

Pose del robot

$$x_1 = 1, y_1 = 0, \theta_1 = 0$$

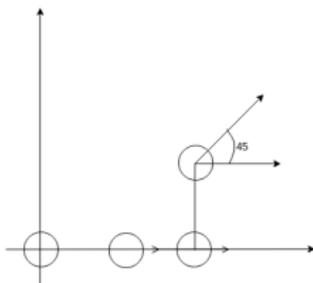
Siguiente pose:

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

$$x_2' = 0.7075 \cdot \cos(0) + 0.7075 \cdot \sin(0) = 0.7075$$

$$y_2' = -0.7075 \cdot \sin(0) + 0.7075 \cdot \cos(0) = 0.7075$$

$$\theta_2' = 45^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 3$

Pose del robot

$$x_2 = 1.7075, y_2 = 0.7075, \theta_2 = 45^\circ$$

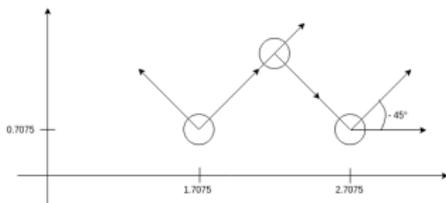
Siguiente pose:

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0^\circ$$

$$x_3' = 1 \cdot \cos(45^\circ) + 0 \cdot \sin(45^\circ) = 0.7075$$

$$y_3' = -1 \cdot \sin(45^\circ) + 0 \cdot \cos(45^\circ) = -0.7075$$

$$\theta_3' = -45^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 4$

Pose del robot

$$x_3 = 2.7075, y_3 = 0.7075, \theta_3 = 0$$

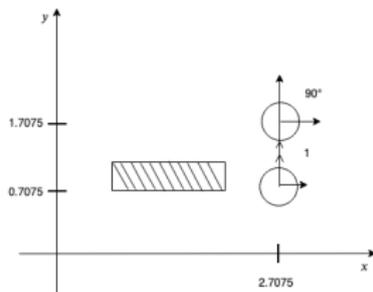
Siguiente pose:

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

$$x'_4 = 0 \cdot \cos(0^\circ) + 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

$$y'_4 = -0 \cdot \sin(0^\circ) + 1 \cdot \cos(0^\circ) = 1$$

$$\theta'_4 = -90^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 5$

Pose del robot

$$x_4 = 2.7075, y_4 = 1.7075, \theta_4 = 90^\circ$$

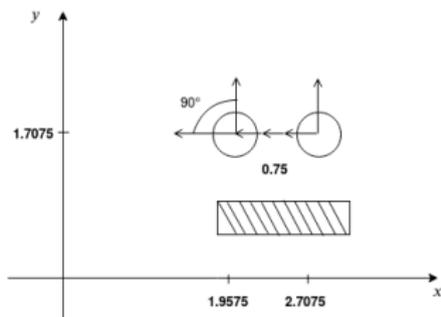
Siguiente pose:

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$

$$x'_5 = -0.75 \cdot \cos(90^\circ) + 0 \cdot \sin(90^\circ) = 0$$

$$y'_5 = 0.75 \cdot \sin(90^\circ) + -0.75 \cdot \cos(0^\circ) = 0.75$$

$$\theta'_5 = -90^\circ$$



Caso 2. Robot Omnidireccional

Tiempo $i = 6$

Pose del robot

$$x_5 = 1.9575, y_5 = 1.7075, \theta_5 = 180^\circ$$

Siguiente pose:

$$x_6 = 2.9575, y_6 = 2.4150, \theta_6 = 45^\circ$$

$$x'_6 = 1 \cdot \cos(180^\circ) - 0 \cdot 7075 \sin(180^\circ) = -1$$

$$y'_6 = 1 \cdot \sin(180^\circ) + -0 \cdot 7075 \cos(180^\circ) = 0.7075$$

$$\theta'_6 = -135^\circ$$

