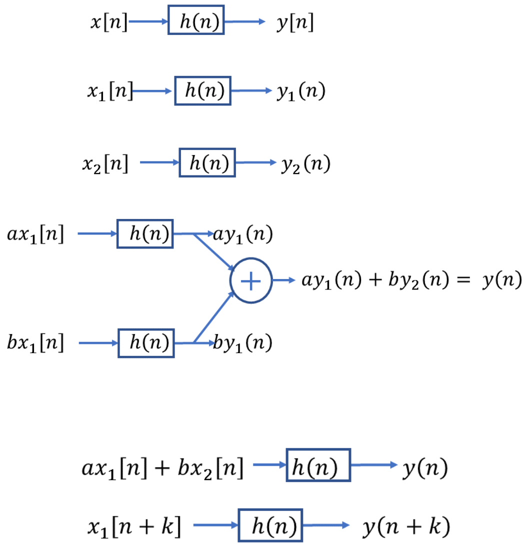
Lección 3
Fundamentos

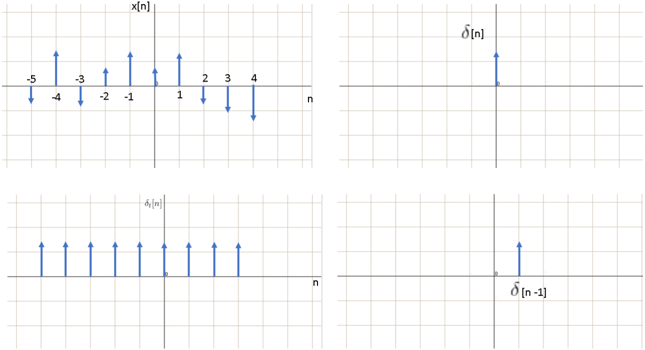
Jesús Savage, Marco Negrete, Hugo Estrada, Reynaldo Martell, Julio Cruz, Marco Negrete

11 de marzo de 2021

Sistema lineal e Invariante en el Tiempo

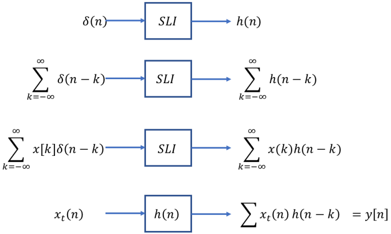


Convolución



$$\delta_t[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$
$$x_t[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Convolución



Entonces la convolución discreta se define como:

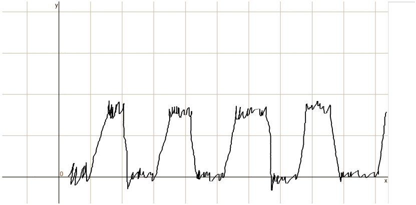
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

La convolución continua:

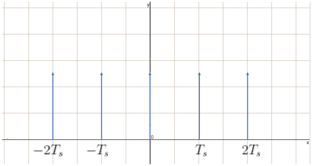
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t-\zeta)d\zeta$$

Muestreo de señales de una dimensión

Para muestrear una señal en el tiempo $x(t)$ se multiplica ésta por un tren de impulsos, los cuales tienen un periodo de T_s.
Sea $x(t)$:



$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$



Muestreo

Por lo tanto la versión muestreada de $x(t)$, es:

$$x[k] = x(t) \cdot f(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

El efecto que tiene este muestreo de la señal $x(t)$ en el dominio de la frecuencia es el siguiente:
Sea $X(w) = F\{x(t)\}$ la transformada de Fourier de $x(t)$, y $F(w) = F\{f(t)\}$ la transformada de Fourier del tren de impulsos.
Entonces la multiplicación $x(t) \cdot f(t)$ en el dominio de la frecuencia se convierte en la convolución de las transformadas de Fourier de las dos señales: $X(w) * F(w)$

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier de un tren de impulsos

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Usando Series de Fourier para representar $f(t)$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_s t}$$

en donde:

$$F_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} f(t) e^{-jnw_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t - nT_s) e^{-jnw_s t} dt$$

Transformada de Fourier

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jnw_s t} dt = \frac{1}{T_s} = F_n$$

Usando la siguiente propiedad de la función $\delta(t)$:

$$\int \delta(t) n(t) dt = n(0)$$

Transformada de Fourier

Entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{-jnw_s t} \qquad ;$$

Por lo tanto su transformada de Fourier es:

$$F(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnw_s t} e^{-jwt} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jnw_s t} e^{-jwt} dt$$

Transformada de Fourier

Por otra parte la transformada inversa de Fourier

$$F^{-1}\{G(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{jwt}dw = g(t)$$

$$F^{-1}\{\delta(w - nw_s)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s)e^{jwt}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{jnw_s t}$$

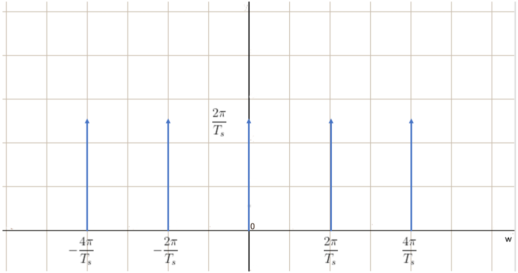
Entonces:

$$\Rightarrow F\{e^{jnw_s t}\} = 2\pi\delta(w - nw_s)$$

Transformada de Fourier

Con: $w_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$
Por lo tanto la transformada de Fourier de un tren de impulsos en el tiempo es otro tren de impulsos en el dominio de la frecuencia:

$$F\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jnw_s t}\} = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s)$$



Muestreo

Entonces la transformada de Fourier de la versión muestreada de $x(t)$, es:

$$X_s(w) = F\{x[k]\} = F\{x(t) \cdot f(t)\} = F\{x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)\}$$

$$= X(w) * F(w) = X(w) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\zeta) \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_s - \zeta) d\zeta$$

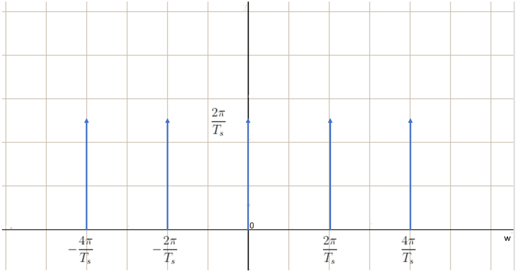
$$= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\zeta) \delta(w - nw_s - \zeta) d\zeta$$

Muestreo

Finalmente:

$$X_s(w) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(w - nw_s)$$

Es decir que el espectro $X(w)$ se repite escalado períodicamente cada nw_s y estos espectros no se van a traslapar si $w_s \geq 2w_x$, donde w_x es el ancho de banda de la señal muestreada.



Muestreo de señales de dos dimensiones

Para el muestreo de señales de dos dimensiones se procede de la misma forma que con una dimensión, pero ahora el muestreo se hace en el espacio x, y:

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\delta_x, y - n\delta_y)$$

donde δ_x y δ_y es el espaciamiento en x y y respectivamente.
Entonces, para tener una versión muestreada de una función $g(x,y)$:

$$g_s(x,y) = g(x,y) \cdot f(x,y) = g(x,y) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\delta_x, y - n\delta_y)$$

En el dominio de la frecuencia esta multiplicación es una convolución:

$$G_s(w_1, w_2) = G(w_1, w_2) * F(w_1, w_2)$$

Siendo $G(w_1, w_2)$ la transformada de Fourier de $g(x, y)$.
$F(g(x, y)) = G(w_1, w_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-jw_1 x} e^{-jw_2 y} dxdy$
De manera similar que con el tren de impulsos de una dimensión, la transformada de Fourier de un tren de impulsos de dos dimensiones $f(x, y)$ es otro tren de impulsos de dos dimensiones:

$$F\{f(x, y)\} = F(w_1, w_2) = w_x w_y \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(w_1 - k w_x, w_2 - l w_y)$$

donde $w_x = \frac{1}{\delta_x}$ y $w_y = \frac{1}{\delta_y}$.
Por lo tanto la transformada de Fourier de la señal muestreada es:

$$G_s(w_1, w_2) = G(w_1, w_2) * F(w_1, w_2) =$$

$$G(w_1, w_2) * w_x w_y \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(w_1 - k w_x, w_2 - l w_y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta_1,\zeta_2)\cdot w_x w_y \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(w_1 - kw_x - \zeta_1, w_2 - lw_y - \zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$= w_x w_y \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta_1,\zeta_2)\delta(w_1 - kw_x - \zeta_1, w_2 - lw_y - \zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2$$

Entonces $G_s(w_1, w_2)$ es un señal períodica de dos dimensiones escalada de la transforma de Fourier de $g(x, y)$:

$$G_s(w_1, w_2) = w_x w_y \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} G(w_1 - kw_x, w_2 - lw_y)$$

Para que no exista traslape en el dominio de la frecuencia se requiere que $w_x > 2w_{bx}$ y $w_y > 2w_{by}$ donde w_{bx} y w_{by} son el ancho de banda de la señal $G_s(w_1, w_2)$.

Muestreo

El fenómeno de aliasing en imágenes también se llama Moiré.

(a) Muestreo adecuado

(b) Submuestreo

Representación del Color

El empleo del color está motivado por dos factores:

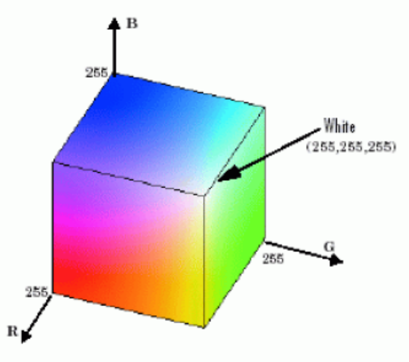
1. En análisis automático, el color representa un potente descriptor que facilita la identificación de objetos y la descripción de escenas.
2. En el análisis hecho por humanos, nuestros ojos son capaces de discernir muchos más matices e intensidades de color comparado con los pocos niveles de gris que vemos.

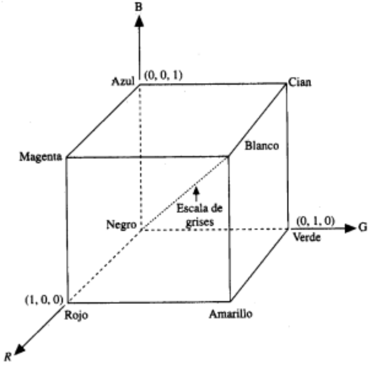
Fundamentos del color

La luz blanca se divide en un espectro de color que contiene 6 regiones: violeta, azul, verde, amarillo, naranja y rojo.
Cuando se observa el color real se ve que ningún color del espectro finaliza de forma brusca, sino que cada color se mezcla suavemente.

Espacio de color RGB

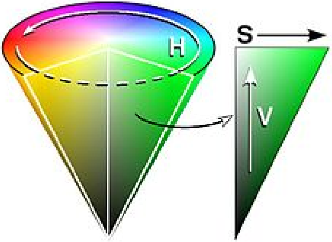
En este modelo cada color aparece con sus componentes espectrales primarias de rojo, verde y azul. Está basado en un sistema de coordenadas cartesianas y su subespacio de color está definido como un cubo unitario, de manera que,los valores de cada punto de este espacio están normalizados de $[0, 1]$.





Espacio de color HSV

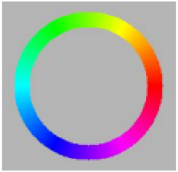
Para distinguir un color de otro deben considerarse el tono (hue), la saturación (saturation) y el brillo o valor (value), estos valores juntos forman el espacio HSV por sus siglas en ingles. A partir de los valores RGB de la imágen se pueden encontrar los valores HSV
1. El Brillo o intensidad o valor V.



$$V = max(R, G.B)$$

Espacio de color HSV

2. El tono H (hue) está asociado con la longitud de onda dominante en una mezcla de ondas luminosas.

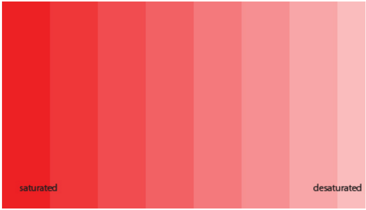


El valor del tono H se encuentra de la siguiente forma:
$H = 60(G - B)/(V - min(R, G, B)), \quad si \quad V = R$

$H = 120 + 60(B - R)/(V - min(R, G, B)) \quad si \quad V = G$
$H = 240 + 60(R - G)/(V - min(R, G, B)) \quad si \quad V = B$

Espacio de color HSV

3. La saturación S es la pureza relativa o cantidad de luz blanca mezclada con un tono. Los colores puros del espectro están completamente saturados. Los colores como el rosa (rojo mas blanco) y el lavanda (azul y blanco) están menos saturados, siendo su grado de saturación inversamente proporcional a la cantidad de luz blanca añadida.



$$S = (V - min(R,G,B))/V, \quad si \quad V \neq 0$$
$$S = 0, \quad si \quad V = 0$$